

Advanced Structural Dynamics

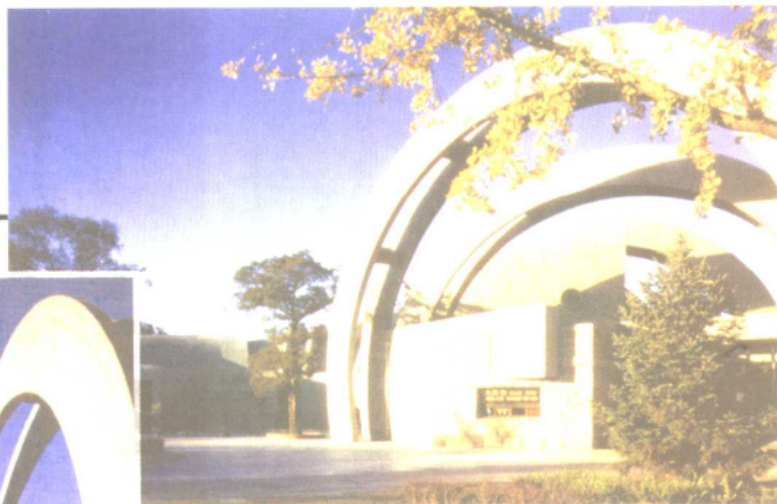
高等 结构动力学

于建华 谢用九 魏泳涛 编著



四川大学出版社

高等结构动力学



Advanced Structural Dynamics

ISBN 7-5614-1993-7



9 787561 419939 >

ISBN 7-5614-1993-7 / TU · 5

定价: 35.00 元

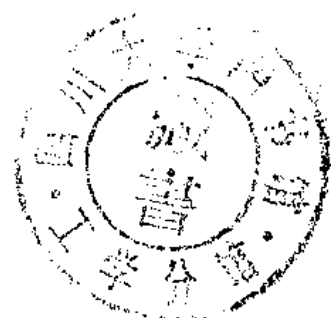
1009452

四川大学研究生教材建设基金重点资助项目

高等结构动力学



于建华 谢用九 魏泳涛 编著



T04083



四川大学出版社

责任编辑:李川娜
责任校对:朱兰双
封面设计:罗 光
责任印制:曹 琳

图书在版编目(CIP)数据

高等结构动力学/于建华,谢用九,魏泳涛编著.
成都:四川大学出版社,2001.5
ISBN 7-5614-1993-7

I. 高... II. ①于...②谢...③魏... III. 结构动力学 IV.0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 029546 号

书 名 高等结构动力学

作 者 于建华 谢用九 魏泳涛 编著
出 版 四川大学出版社
地 址 成都市一环路南一段 24 号 (610065)
印 刷 成都金龙印务有限责任公司
发 行 新华书店经销
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 15.50
字 数 375 千字
版 次 2001 年 5 月第 1 版
印 次 2001 年 5 月第 1 次印刷
印 数 0 001~1 000 册
定 价 35.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科
联系。电 话:5412526/5414115/
5412212 邮 编:610064

◆本社图书如有印装质量问题,请
寄回印刷厂调换。

版权所有◆侵权必究

序

“年年岁岁花相似，年年岁岁人不同”。在世纪之交，经过又一次高教体制改革，强强合并后的新四川大学已成为我国西部地区规模最大、学科门类最齐全的新型综合性研究型大学。

作为新世纪的献礼，我校研究生教材建设基金资助的第一批研究生优秀教材正式出版了，我在此表示热烈地祝贺。

众所周知，21世纪是知识经济的世纪，国际竞争空前激烈。竞争的焦点是科学技术，竞争的核心是创新型人才，竞争的关键是国民教育。对于四川大学这样的国家重点大学而言，则要注意大力发展研究生教育，扩大研究生规模，注重研究生质量。

校长、教师、教材是办学中的三大要素。教材是教学改革与师生智慧的重要的物化的结晶。正是基于这种思考，我校决定在以学科建设为龙头的同时，努力加强研究生的教材建设，通过各种渠道，筹集了专项基金，用以资助研究生优秀教材的编写和出版。我们首次资助的是有博士学位授权点的学科专业中涉及面大、使用面宽的研究生学位平台课程的优秀教材。今后，还将陆续扩大教材基金资助的范围，包括资助我校新增加的医学门类的有关教材的出版。

这次推出的研究生教材的基本特点是：符合该学科教学大纲的基本要求，有较强的理论性和系统性。它既反映了该学科发展的新知识、新动向、新成就，也反映了我校教师在该门学科教学与科研中的成果与经验。

前人说得好：古今之成大业、立大功者，都必须经过三种境界。“昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路”，此第一境也；“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”，此第二境也；“众里寻他千百度，回头蓦见，那人正在灯火阑珊处”，此第三境也。研究生的优秀教材的建设应该算作一种“大事业”。本教材的作者们对于研究生教育改革的执着追求，令人钦佩；他们的无私奉献精神，值得赞扬；他们所取得的教学科研成果应该积极推广，使它产生应有的社会效益，为百年名校增添光彩。我希望在首批及以后陆续出版的我校研究生教材中能出现“传诸后世”的佳作，更希望我校有更多教授、名家动手撰写研究生教材，为建设国内一流、在国际上有影响的新四川大学而做出更大的贡献。

四川大学副校长
四川大学研究生院院长
中国科学院院士

刘应明 教授

2001年3月8日

2001/3/8

目 录

前言	(1)
第1章 结构动力学的一般概念	(3)
1.1 结构动力分析的目的	(3)
1.2 非随机荷载的类型	(4)
1.3 三类动力问题	(4)
1.4 几种离散的方法	(5)
1.5 动力体系运动方程建立的途径	(7)
第2章 单自由度体系的振动	(9)
2.1 运动方程的建立	(9)
2.1.1 直接平衡法	(9)
2.1.2 虚功分析	(10)
2.1.3 哈密顿原理的应用	(11)
2.2 重力的影响	(11)
2.3 支座扰动的影响	(12)
2.4 广义单自由度体系	(13)
2.4.1 刚体集合型的广义单自由度体系	(13)
2.4.2 分布柔度型广义单自由度体系的近似求解——瑞利法	(15)
2.5 自由振动反应	(16)
2.5.1 无阻尼自由振动	(16)
2.5.2 有阻尼自由振动	(18)
2.6 在简谐荷载作用下的反应	(23)
2.6.1 无阻尼体系	(24)
2.6.2 阻尼体系	(25)
2.6.3 共振反应	(28)
2.7 在任意周期荷载作用下的反应	(29)
2.8 在冲击荷载作用下的反应	(31)
2.8.1 冲击荷载反应的一般性质	(31)
2.8.2 各种脉冲波的动态响应分析	(31)
2.8.3 反应谱及震动谱	(34)
2.9 在任意动力荷载作用下的反应与杜哈梅尔积分	(36)
2.9.1 无阻尼体系的杜哈梅尔积分及数值计算	(36)
2.9.2 有阻尼体系的杜哈梅尔积分及计算	(39)

习题	(41)
第3章 多自由度体系的振动	(45)
3.1 自由度的选择	(45)
3.2 用动力平衡条件建立动力方程	(45)
3.3 用影响系数法建立运动方程	(47)
3.4 结构特性矩阵的计算与动力问题的有限元列式	(51)
3.5 特性矩阵的线性近似	(58)
3.5.1 分布荷载的线性近似	(58)
3.5.2 集中质量矩阵	(59)
3.6 框架结构运动方程的建立	(61)
3.7 静力凝聚	(63)
3.8 频率向量与振型阵	(65)
3.9 正交条件	(68)
3.9.1 基本条件	(68)
3.9.2 规格化	(69)
3.10 正则坐标	(70)
3.11 无阻尼体系非耦合的运动方程	(72)
3.12 阻尼体系非耦合的运动方程	(74)
3.13 振型叠加法概要	(75)
习题	(79)
第4章 离散结构动力学方程的逐次积分法	(82)
4.1 增量的平衡方程	(82)
4.1.1 逐次积分法的引入	(82)
4.1.2 增量平衡方程	(83)
4.2 中心差分法	(85)
4.2.1 中心差分法的基本公式	(85)
4.2.2 中心差分法的计算步骤	(85)
4.2.3 中心差分法的特点	(86)
4.2.4 例题	(87)
4.3 豪鲍尔特(Houbolt)法	(88)
4.3.1 豪鲍尔特法的基本公式	(88)
4.3.2 豪鲍尔特法的计算步骤	(88)
4.3.3 豪鲍尔特法的特点	(89)
4.3.4 例题	(89)
4.4 威尔逊- θ 法	(90)
4.4.1 线性加速度假设	(90)
4.4.2 威尔逊- θ 法的求解公式	(91)

4.4.3	威尔逊- θ 法的计算步骤	(92)
4.4.4	例题	(93)
4.5	纽马克(Newmark)法	(94)
4.5.1	纽马克法的基本假定和计算公式	(94)
4.5.2	纽马克法的计算步骤	(95)
4.5.3	例题	(96)
4.6	数值积分法的稳定性和计算精度	(98)
4.6.1	计算精度和稳定性的概念	(98)
4.6.2	运动方程变换和解的形式改进	(99)
4.6.3	算子矩阵 A 和算子向量 L 的推导	(99)
4.6.4	稳定性分析	(101)
4.6.5	计算精度分析	(103)
	习题	(105)
第5章	多自由度系统特殊情况及变分解法	(106)
5.1	多自由度系统的几种特殊情况	(106)
5.1.1	半定系统的求解	(106)
5.1.2	退化系统(简并系统)的求解	(109)
5.2	用变分法求解多自由度体系的动力问题	(113)
5.2.1	广义坐标	(113)
5.2.2	拉格朗日运动方程	(113)
	习题	(116)
第6章	实用振动分析	(117)
6.1	结构的动力特征值问题解的性质	(117)
6.1.1	广义的和标准形式的特征值问题	(117)
6.1.2	结构的动力特征值问题解的性质	(117)
6.2	矩阵迭代法	(119)
6.2.1	基本振型分析	(119)
6.2.2	第二振型分析	(122)
6.2.3	第三振型和更高振型分析	(124)
6.2.4	最高振型分析	(125)
6.2.5	带有移位的迭代法	(127)
6.3	霍尔兹(Holzer)法	(129)
6.4	瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)分析	(133)
6.5	子空间迭代法	(134)
	习题	(136)
第7章	地震学基础	(137)
7.1	地震的基本知识	(137)

7.1.1	地震的种类和成因	(137)
7.1.2	地震震级及烈度	(141)
7.2	地震波	(144)
7.2.1	弹性波理论简介	(144)
7.2.2	地震波的种类和性质	(148)
7.2.3	地震波的观测结果	(149)
7.2.4	地震波记录	(149)
7.3	地震对结构的影响	(149)
7.3.1	地震灾害	(149)
7.3.2	地震引起结构破坏的影响因素	(151)
	习题	(153)
第8章	结构抗震分析的基本原理	(154)
8.1	结构的地震响应及地震反应谱	(154)
8.1.1	简单振子的地震反应	(154)
8.1.2	地震反应谱	(155)
8.1.3	设计地震的选择	(157)
8.2	地震反应的数定分析的地震输入机制	(162)
8.3	结构在水平地震作用下的反应计算	(163)
8.3.1	集中质量单自由度体系	(163)
8.3.2	广义单自由度体系	(165)
8.3.3	集中质量多自由度体系	(168)
8.4	考虑转动干扰及多点输入时结构地震反应计算	(177)
8.4.1	刚性地基转动干扰	(177)
8.4.2	对多点多相位地震输入的结构反应计算方法	(178)
8.5	竖直地震的抗震验算	(179)
8.5.1	高耸结构	(179)
8.5.2	大跨度结构	(180)
8.6	结构的非线性地震反应分析	(180)
8.6.1	采用时程分析法计算非线性地震反应	(180)
8.6.2	钢筋混凝土构件的恢复力模型	(181)
8.6.3	按层间剪切模型计算框架非弹性地震反应	(184)
8.6.4	非线性地震反应分析的一般方法	(189)
8.7	延性系数法	(192)
	习题	(194)
第9章	工程结构的隔震和减振控制	(197)
9.1	隔振原理	(197)
9.1.1	主动隔振与被动隔振的力学模型	(197)

9.1.2 例题.....	(200)
9.2 工程结构隔震的原理.....	(201)
9.2.1 工程结构减震控制的概念.....	(201)
9.2.2 建筑物隔震的原理.....	(202)
9.2.3 隔震装置及基本要求.....	(204)
9.3 夹层橡胶隔震座的构造及参数近似计算.....	(205)
9.3.1 夹层橡胶隔震座的构造和力学特性.....	(205)
9.3.2 隔震座材料参数的近似计算.....	(208)
9.4 隔震建筑的地震反应计算.....	(210)
9.5 建筑物控振原理和方法.....	(215)
9.5.1 控制方法和控制系统的重要环节.....	(216)
9.5.2 结构主动控制的减震原理.....	(218)
9.5.3 主动施加控制力的减震控制简介.....	(218)
9.6 主动控制算法简介.....	(220)
9.6.1 经典线性最优控制算法.....	(220)
9.6.2 瞬时最优控制算法.....	(221)
9.7 结构的半主动控制.....	(222)
9.8 智能材料结构及计算智能简介.....	(223)
9.8.1 智能材料结构.....	(223)
9.8.2 计算智能简介.....	(225)
复习参考题.....	(227)
习题.....	(228)
参考文献.....	(229)
习题解答.....	(230)

前 言

本书是为土木、水利、工程力学、机械专业硕士研究生的学位课程“高等结构动力学”而编写的教材。此课程旨在帮助研究生掌握结构动力学的基础理论、建模技能及分析计算方法，并能运用理论知识解决工程实际问题。

本书是在四川大学和西南交通大学有关讲义的基础上，通过较长时间(8~10年)的教学实践而逐渐修改而成。

本书以工科专业本科的力学和数学课程(理论力学、材料力学、结构力学、高等数学和工程数学)作为起点，在取材与编排上有以下的特点：①突出解决工程实际问题的能力，在重视基础理论系统性的同时，在不失严密性的前提下，着重阐述理论和方法的工程背景 and 实际应用，而不拘泥于公式的繁琐推导。②在取材上注意采纳国内外相关教材的内容和方法，尽可能反映该领域内最新成就和进展。

全书共分9章，其中前3章介绍单自由度与多自由度系统动力分析的基础知识，第4章至第6章分别介绍求解动力问题的数值解法、较深入问题的求解方法以及实用振动分析的技巧和方法。第7章、第8章分别介绍地震学基础知识及结构抗震分析的基本原理。第9章介绍结构动力学中几个前沿领域的理论和应用，包括结构隔震理论及其应用，工程减震控制理论及其应用等。

在每章之后配有习题和思考题，在书末附有部分习题的答案。

本书的前6章可以作为土木工程、力学、水利等专业的结构动力学本科教材。

本书得到了四川大学研究生教材建设基金的重点资助和四川大学建筑学院的大力支持，在此表示由衷感谢。

于建华教授与谢用九教授参与全教材的编写和修改、定稿工作，魏泳涛博士参与第2章至第6章和第8章的部分章节的编写工作，硕士谢凌志、陈颖参加部分习题解答和提示的编写，硕士研究生李金桥、曹波、冷谦参与插图绘制工作。

本书在编写和审校过程中，得到了四川大学出版社李川娜和韩果两位编辑的大力帮助。

作者希望本书能为提高研究生教学质量起到绵薄之力，由于时间和水平所限，本书定有不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正。

编者
2001年4月

第1章 结构动力学的一般概念

1.1 结构动力分析的目的

随着现代工程技术的飞速发展,各种结构的尺寸日益增大,新型结构不断出现,结构的重量日趋减小,对结构进行动力分析的要求越来越迫切。工程结构对于动力荷载如风荷载、冲击荷载、旋转机械引起的周期荷载以及地震荷载等的反应(包括位移、变形和应力等),已成为工程师们在进行结构设计时必须考虑的一个问题。近年来对结构物发生破坏的原因进行调查,可以看到,对结构物静态特性考虑不周,造成破坏的情况较少;而绝大多数情况是对于结构物动态特性考虑不周引起的破坏。研究结构动力学的目的就是要保证结构在整个使用期间,在可能发生的动力荷载作用下能够正常工作,确保它的安全、可靠。这就需要确定结构物在任意动力荷载作用下随时间变化的反应。确定结构反应的方法有两种:分析的方法和实验的方法。对于复杂结构,两种方法可以同时并用,本教材只讨论分析的方法。

在结构分析中,我们学过在静荷载的作用下结构反应(位移、变形和应力)的计算问题,这类问题称为静力问题。在静力问题中,静荷载是不随时间变化的,由它引起的结构反应也不随时间变化,因而它具有单一解,一次分析便能得到所要求的全部解答。同时,结构在承受静荷载时,因受力过程缓慢,结构质量的惯性力可忽略不计。这样,结构的静力分析问题就变得十分简单了。

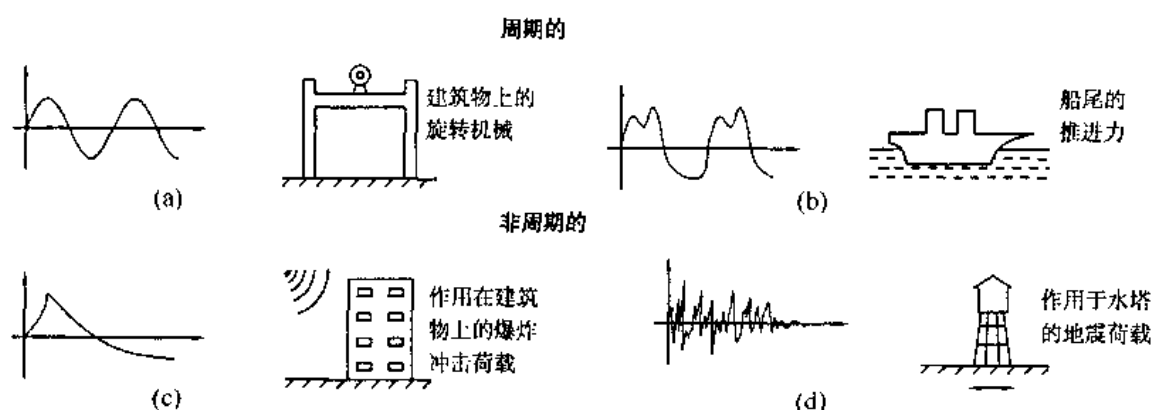
在结构动力学中,结构承受的荷载是动荷载,荷载的大小、方向和作用点都可以随时间变化。由它引起的结构的反应,亦即结构的挠度和应力,也是随时间变化的。因此不能像静力问题那样得到单一解,而必须求得反应时程中的一系列解答。同时,结构在承受动荷载时,结构上的质量是运动的,要产生抵抗加速度的惯性力。结构内部的弹性力不仅要平衡外荷载,还必须平衡由加速度引起的惯性力,这就使得结构的动力分析要比静力分析复杂得多。

结构的静力分析方法和动力分析方法在性质上是根本不同的。但在结构线弹性分析中,往往把施加荷载的静力分量和动力分量区分开来,然后分别计算结构对于每种荷载的反应,最后再将两个反应分量叠加得出总的反应。

结构动力分析的方法分为数定的和非数定的两种。在给定情况下,采用哪种方法取决于荷载的性质。如果荷载随时间的变化完全已知,无论变化多么不规则或者变化率多么大,都把这类荷载称为非随机荷载。结构在非随机荷载下的反应分析定义为数定分析。如果荷载随时间的变化不是完全已知的,但可以按统计的方法来定义,这种荷载称为随机荷载。结构在随机荷载作用下的反应分析定义为非数定分析。本教材只讨论结构的数定分析。

1.2 非随机荷载的类型

非随机荷载可以分为周期荷载和非周期荷载两种。按一定时间间隔重复其变化规律的荷载称为周期荷载。最简单的周期荷载是图1-1(a)所示的简谐荷载。这种荷载随时间的变化曲线是一条正弦曲线或者是一条余弦曲线，此类荷载是由旋转机械装置中质量的不平衡引起的。较复杂的周期荷载不能用单一的函数来表示，但如果利用傅里叶级数，这类荷载可以表示为三角函数之和。因此周期荷载下的反应分析，原则上可以按同样的标准过程进行。较复杂的周期荷载如图1-1(b)，可以由往复式机械装置中的惯性力引起或者由船尾推进器所产生的流体动压力引起。



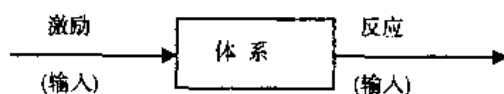
(a) 简谐荷载 (b) 复杂荷载 (c) 冲击荷载 (d) 长持续时间的荷载

图 1-1 典型动力荷载的特性及来源

非周期荷载可以是短持续时间的冲击荷载或者是长持续时间的一般形式的荷载，如图1-1(c)，(d)。爆炸引起的强大气流作用于结构是发生冲击荷载的典型例子。这种短持续时间的荷载可以用特殊的简化方法来进行分析。一般形式的长持续时间的荷载，例如由地震引起的荷载，只能用动力分析的一般方法进行分析。

1.3 三类动力问题

在动力问题中，通常把研究的对象称为体系。它可以是一个零部件，也可以是一个完整的结构。动荷载等引起体系发生振动的因素称为激励(输入)，它们作用于体系使其产生的振动运动称为反应(输出)。这三者构成了动力问题的三个要素，它们之间的关系可以用下面的框图来表示：



动力问题按欲求上述三要素中的某一个分为三类:

① 反应问题: 已知激励和体系, 求反应。这是工程中最常见、最基本的问题, 也是我们研究的主要内容。其主要目的是验算结构工作时的反应(位移、变形、应力等)是否满足预定的安全要求或其他要求。

② 识别问题: 已知激励和反应, 求体系。即识别体系的物理特性(如质量、刚度和阻尼系数等)。

③ 测量问题: 已知体系和反应, 求激励。例如利用加速度计或位移计测量由地震引起的地面运动就属于这类问题。

1.4 几种离散的方法

与结构分析相同, 结构动力学也需要进行数学抽象, 借助某种力学模型来研究。选择的模型要简单, 而且能反应真实体系的主要特征和性能。模型可分为两类: 分布参数体系和离散体系。实际工程结构的物理参数, 例如梁、板、轴等的质量及弹性一般是连续分布的, 保持这种特点抽象出来的模型仍具有无穷多个参数, 这样的模型体系称为分布参数体系。在绝大多数情况下, 为了便于分析, 往往需要通过适当的方法将分布参数体系“凝缩”为只有有限个参数的体系, 这就是离散体系。分析两种体系所采用的数学工具不同, 分布参数体系借助于偏微分方程, 而离散体系则借助于常微分方程。本教材只讨论离散体系。

由于两种体系所具有的自由度的数目不同, 分布参数体系又称为无限自由度体系; 离散体系则称为多自由度体系, 它的最简单情况是单自由度体系。注意, 这里指的是动力自由度, 即体系的自由度是要确定体系全部质量的位置所需要的独立坐标的数目。例如一个在 xy 平面内运动的质量需要三个坐标—— x 和 y 方向的平移和绕 z 轴(垂直于 xy 平面)的转角才能完全确定它的位置, 因此它是一个三自由度的体系。如果忽略转动惯性力, 把它看作一个质点, 则只有 x 和 y 两个方向的平移自由度。如果某个方向的位移再受到约束, 则变为一个单自由度体系。

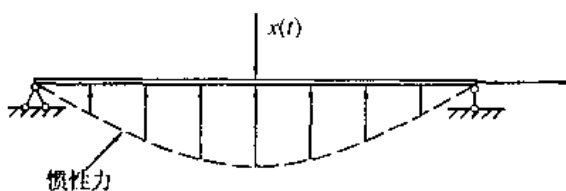


图 1-2 承受动荷载的简支梁

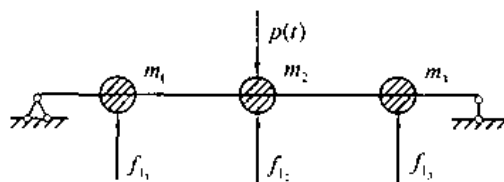


图 1-3 简支梁的集中质量理想化模型

如图1-2所示, 简支梁的质量和刚度是连续分布的, 是一个分布参数体系。每点都可以布置一个质量, 其位置至少必须用一个独立的坐标来描述, 因此体系有无穷多个自由度。为了便于分析, 需要把它“凝缩”为只有有限个自由度的离散体系。“凝缩”的过程称为离散化。离散化的方法有三种: 集中质量法、广义位移法和有限单元法。

集中质量法把结构的质量集中于一系列的离散点上, 只有这些质量点才产生惯性力, 因而只需考虑与它们有关的自由度, 使分析大为简化。图1-3就是图1-2所示简支梁的一种理想化模型。如果忽略轴向变形, 由于体系的约束, 三个质点只能在竖直方向运动, 这样体系就具有三个自由度。如果把质量看作质块, 它具有有限的转动惯量, 则需要考虑转动位移, 这样体系的自由度数不是三个而是六个(三个竖向位移和三个转动位移)。

顺便提一下, 静力问题中的自由度和前面提到的动力自由度的概念是不一样的。在静力问题中, 一个物体的自由度数定义为在不考虑应变的条件下确定该物体在空间中的位置所需要的独立参数的数目, 亦即体系的几何不变度。如图1-3所示简支梁为一个几何不变且又无多余约束的体系, 其静力自由度为零。而在动力问题中, 它却有三个或六个自由度, 因此必须区分体系的静力自由度和动力自由度数。

实际上集中质量法在处理大部分质量时, 对集中在几个离散点的结构特别有效。但是, 如果体系的质量处处都是均匀分布的, 就可利用广义位移法。它也是减少自由度的一种好方法。

广义位移法假定结构的挠曲形状可用一系列规定的位移函数 $\psi_i(x)$ 的和来表达。每一个位移函数(又称为形状函数)仅仅是位置坐标 x 的函数, 而且它必须满足结构的边界条件并保持在结构内部的连续性。所假定的位移函数的数目 n 代表所考虑的自由度数。全结构的位移表达式可写为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) Z_i(t) \quad (1-1)$$

式中 $Z_i(t)$ 称为广义坐标, 它是时间 t 的函数。作为一个简单例子, 就是用三角级数来表示图1-2所示简支梁的挠曲线, 取 $n=3$, 则

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^3 \sin \frac{i\pi x}{L} Z_i(t) \quad (1-2)$$

式中 L 为梁的长度。显然结构在某时刻的挠曲形状, 取决于该时刻广义坐标 $Z_i(t)$ 的值。

有限单元法综合了集中质量法及广义坐标法二者中的某些特点。这个方法是分析连续结构的有限元法的基础, 它提供了既方便又可靠的体系理想化模型, 对用电子计算机分析而言特别有效。

有限单元法的理想化模型适用于一切结构形式。为了简单起见, 在目前的讨论中将仅考虑一维的结构构件, 但这个方法的概念可以直接引伸到二维及三维的结构单元中去。

对任何结构, 有限单元离散的第一步是将结构分成适当数量的单元, 联结单元的端点称为节点。例如图1-4所示的梁, 其节点的位移组成结构的广义坐标, 整个结构的挠曲线可利用这些广义坐标, 并借助于一组适当的假定的位移函数, 用类似于方程(1-1)的表达式表示。但是在这种情况下, 位移函数被称为插值函数, 因为这些函数确定了指定节点位移之间的形状。例如图1-4画出了与具有二个自由度的节点3有关的插值函数, 这个节点在图平面内产生了横向位移和转角。原则上, 这些插值函数可以是内部连续并满足节点位移所带来的几何位移条件的任意曲线。对于一维单元, 用等截面梁中的节点位移所产生的曲线形状作为插值函数较为方便(它们是三次Hermite多项式, 且示于图1-4中)。

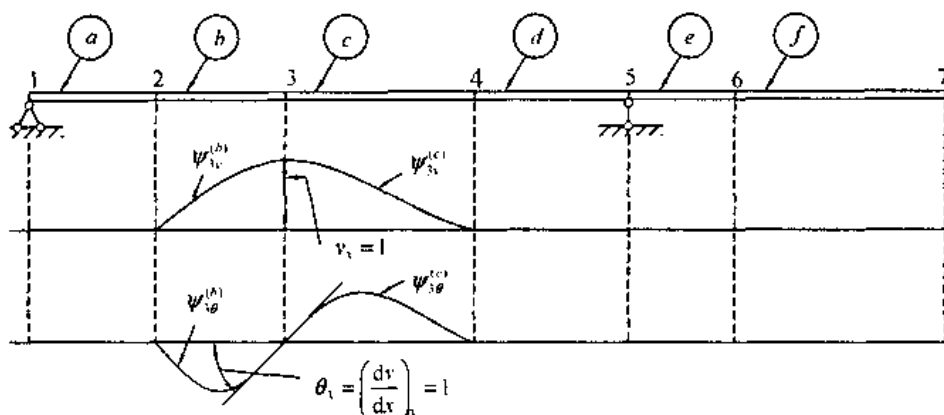


图 1-4 典型的有限单元梁坐标

因为有限单元法所用的位移函数满足广义位移法中所述的条件, 所以这种方法所用的坐标应是广义坐标的一种特殊形式, 它具有如下的优点:

- ① 只要把结构分成适当数量的单元, 即可引入所需的任意数目的广义坐标;
- ② 每一分段所选择的位移函数可以是相同的, 故计算得以简化;
- ③ 因每个节点位移仅影响其邻近的单元, 所以这个方法所导得的方程大部分是非耦合的, 因此解方程式的过程大大地简化。

1.5 动力体系运动方程建立的途径

如前所述, 数定结构动力学的首要目的是对已知结构计算它在给定的随时间变化的荷载作用下的位移—时间过程。描述动力位移的数学表达式称为结构的运动方程, 这些运动方程的解就提供了所求的位移过程。

动力体系的运动方程的建立是整个分析过程中最重要的环节。通常可用三种不同的方法建立运动方程。

1) 直接平衡法

此法的根据是达朗贝尔原理, 即质量所产生的惯性力与它的加速度成正比, 但方向相反。这样我们可以把运动方程表示为动力平衡方程。由此我们可以认为荷载包括许多个作用于质量上的力, 即抵抗位移的弹性约束力 f_s 、抵抗速度的粘滞力 f_D 、独立确定的外荷载 $p(t)$ 以及抵抗加速度的惯性力 f_I , 而运动方程的表达式可写成仅仅是作用在质量上所有力的平衡表达式

$$f_I + f_D + f_s = p(t) \quad (1-3)$$

2) 虚位移原理

如果结构体系相当复杂, 可用虚位移原理。

虚位移原理可阐述如下: 如果一个平衡的体系在一组力的作用下承受一个虚位移(即体系约束所允许的任何微小位移), 则这些力所做的总功将等于零。因此, 在建立动力体系的运动方程时, 首先要搞清作用于体系质量的所有力, 包括按达朗贝尔原理所定义的惯性

力，然后引入相应于每个自由度的虚位移，并使所作的功等于零，由此得到运动方程。

3) 哈密顿原理

哈密顿原理是应用广泛的一种变分原理，此原理可表达为：

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (1-4)$$

式中， T 为体系的总动能， V 为体系的位能，包括应变能及任何保守外力的势能， W_{nc} 为作用于体系上的非保守力（如阻尼力及任意外荷载）所作的功， δ 为在指定时间区间内所取的变分。

哈密顿原理的意义：在任意时间区间 t_1 到 t_2 内，动能和位能的变分加上所考虑的非保守力所作的功必等于零。哈密顿原理主要用于建立连续体的运动方程。若动能项 T 消失，方程 (1-4) 的积分中剩余项将不随时间变化，于是方程简化为

$$\delta(V - W_{nc}) = 0$$

这就是应用在静力分析中著名的最小位能原理。

这里，不妨将保守力及非保守力的概念复习一下：保守力系统实际上是机械能守恒的力学系统。若作用于某质点的场力所作的功只与质点的起始及终止位移有关，而与中间过程无关，此场力称为有势力或保守力，如重力、弹性力等；反之，若不符合以上定义的就是非保守力，如阻尼力、外加荷载等。

第2章 单自由度体系的振动

我们先讨论单自由度体系的振动，这是因为：

- ① 单自由度体系分析起来比较简单，但它却具有一般线性系统共有的基本特性；
- ② 某些工程结构可以简化为单自由度体系来分析；
- ③ 用广义坐标可将多自由度体系的线性结构的强迫振动简化为若干单自由度来研究。

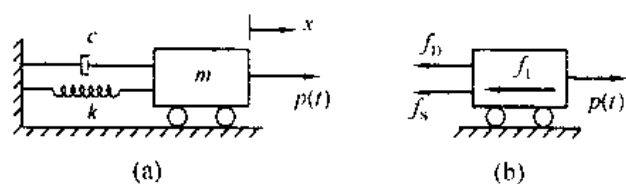
因此，单自由度体系的振动是振动理论的基础，掌握了它的分析方法就为后面章节的学习做好了准备。

2.1 运动方程的建立

分析静力问题必须建立并求解平衡方程。类似地，分析动力问题也必须建立并求解运动方程。

建立运动方程的方法很多，这里介绍三种常用的方法。

2.1.1 直接平衡法



(a) 基本元件 (b) 平衡力系
图2-1 理想化单自由度体系

理想化的单自由度体系如图2-1(a)所示，它由质量 m 、弹簧 k 和阻尼器 c 三个集中元件构成。在随时间 t 变化的动荷载 $p(t)$ 作用下，由于滚筒的约束，质量 m 只能在水平方向移动，用一个位移坐标 $x(t)$ 就可完全确定它的位置，因此它是一个单自由度体系。

质量在运动过程中，各元件都要产生相应的力作用于体系。这些力是抵抗位移的弹性力 f_s ，抵抗速度的阻尼力 f_D 和抵抗加速度的惯性力 f_I ，它们的方向分别与位移、速度和加速度的方向相反。规定速度和加速度的正方向均与位移的方向相同，用这些力来替代相应的元件，并按各个力的正方向标出，得到图2-1(b)所示平衡力系。由力的平衡关系可知

$$f_I + f_D + f_s = p(t) \quad (2-1)$$

由虎克定律，弹性力等于弹簧刚度 k 与位移的乘积

$$f_s = kx \quad (2-2a)$$

假定阻尼是粘滞性的，阻尼力等于阻尼常数 c 与速度的乘积

$$f_D = c\dot{x} \quad (2-2b)$$

由达朗贝尔原理，惯性力等于质量与加速度的乘积

$$f_I = m\ddot{x} \quad (2-2c)$$

将以上三式代入(2-1)式，得单自由度体系的运动方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (2-3)$$

这里，圆点“ \cdot ”表示对时间 t 的导数。

显然，方程(2-3)是力的平衡方程，称为作用力方程或动力平衡方程。对于能直接找到平衡关系的简单体系来说，用直接平衡法是十分方便的。方法的特点是应用达朗贝尔原理，在质量上假想地加上惯性力，然后当作静力平衡问题来处理，因此有些书上又称为“动静法”或“惯性力法”。

设使弹簧产生单位变形所需施加的静力为 k ，而在单位静力作用下，设弹簧的伸缩量为 \tilde{f} 。 k 和 \tilde{f} 分别称为弹簧的刚度和柔度，两者之间有以下关系

$$k = \frac{1}{\tilde{f}} \quad (2-4)$$

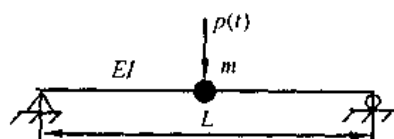


图 2-2 承受集中荷载的简支梁

若以图2-2所示的简支梁为例，设该梁为等截面的，其弯曲刚度为 EI ，梁的中点作用一集中荷载 $p(t)$ ，梁的质量简化为 midpoint 质量 m ，根据柔度的定义，可知

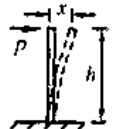
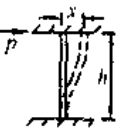
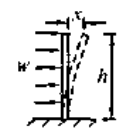
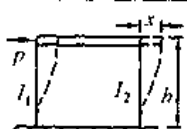
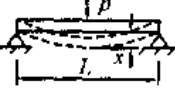
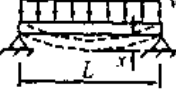
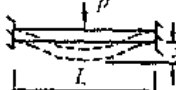
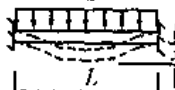
$$\tilde{f} = \frac{L^3}{48EI}, \quad k = \frac{48EI}{L^3}$$

若不考虑运动过程的阻尼，则简支梁的运动方程为

$$m\ddot{x} + \frac{48EI}{L^3}x = p(t) \quad (2-5)$$

为便于读者参考，我们将直杆系统几种常见变形情况下的柔度和刚度示于表2-1。

表2-1 几种常见直杆变形的柔度和刚度(仅考虑弯矩作用)

直杆变形				
柔度	$\frac{h^3}{3EI}$	$\frac{h^3}{12EI}$	$\frac{h^3}{8EI} (wh=1)$	$\frac{h^3}{12E(I_1+I_2)}$
刚度	$\frac{3EI}{h^3}$	$\frac{12EI}{h^3}$	$\frac{8EI}{h^3}$	$\frac{12E(I_1+I_2)}{h^3}$
直杆变形				
柔度	$\frac{L^3}{48EI}$	$\frac{5L^3}{384EI} (wL=1)$	$\frac{L^3}{192EI}$	$\frac{L^3}{384EI} (wL=1)$
刚度	$\frac{48EI}{L^3}$	$\frac{384EI}{5L^3}$	$\frac{192EI}{L^3}$	$\frac{384EI}{L^3}$

2.1.2 虚功分析

仍以图2-1(a)的系统为例，作用于质量 m 上的力示于图2-1(b)。若给 m 以一个虚位移

δx ，则每一个力都将作功，体系所作的总功可写为

$$-f_1\delta x - f_D\delta x - f_S\delta x + p(t)\delta x = 0$$

式中的负号是由于力的方向和位移的方向相反产生的，将方程(2-2)各式代入以上方程并提公因子 δx ，即得

$$[-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + p(t)]\delta x = 0 \quad (2-6)$$

因为 δx 不等于零，方程(2-6)则可变为方程(2-3)的形式。

2.1.3 哈密顿原理的应用

根据定义，体系的动能 T 及弹簧的应变能 U 可分别写为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (2-7a)$$

$$V = U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2-7b)$$

而体系的非保守力为作用于其上的荷载 $p(t)$ 及阻尼力 f_D ，这些力所作功的变分为

$$\delta W_{nc} = p(t)\delta x - c\dot{x}\delta x \quad (2-7c)$$

将(2-7)的各式代入(1-4)式，对第一项进行变分并经整理后可得

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\dot{x}\delta\dot{x} - c\dot{x}\delta x - kx\delta x + p(t)\delta x] dt = 0 \quad (2-8)$$

利用第一项变分的分部积分，注意到变分 δx 在积分限 t_1, t_2 时为零，可得

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + p(t)]\delta x dt = 0 \quad (2-9)$$

因为变分 δx 的任意性，其括号内的表达式等于零应该成立。

2.2 重力的影响

将图2-1(a)所示体系旋转 90° ，得图2-3(a)所示体系，这时，重力就沿位移方向作用了。作用于体系上的力如图2-3(b)所示，利用(2-2)式的三个关系，体系的平衡方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) + W \quad (2-10)$$

式中， $W = mg$ 为刚块所受的重力。

假定由重量 W 引起的静位移为 x_{st} ，质量相对于平衡位置的动位移为 \bar{x} 。如图2-3(c)所示，总的位移可表示为

$$x = x_{st} + \bar{x} \quad (2-11)$$

相应的弹簧力为

$$f_S = kx = kx_{st} + k\bar{x} \quad (2-12)$$

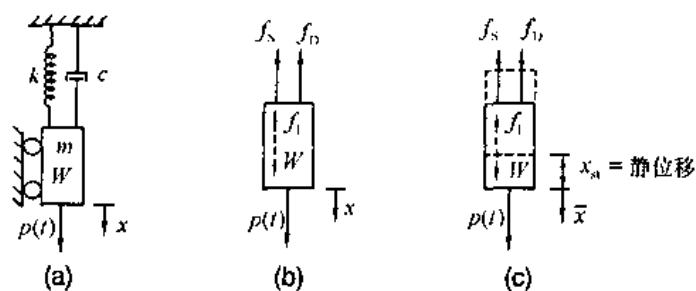
将上式代入(2-10)式，并注意到 $kx_{st} = W$ ，得

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\bar{x} = p(t) \quad (2-13)$$

将方程(2-11)对时间 t 求导，注意到静位移 x_{st} 是不随时间变化的，因此有 $\dot{x} = \dot{\bar{x}}$ 和 $\ddot{x} = \ddot{\bar{x}}$ 。

把这两个关系代入(2-13)式得

$$m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = p(t) \quad (2-14)$$



(a) 基本元件 (b) 平衡力系 (c) 消除重力影响

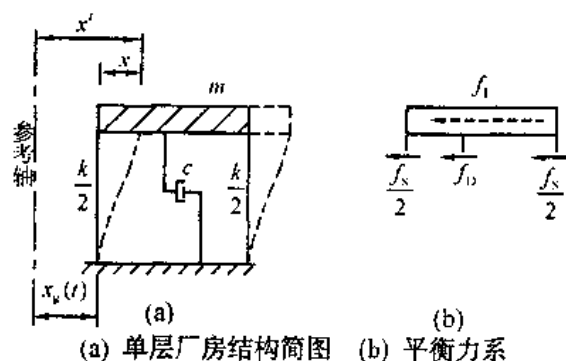
图 2-3 重力对单自由度体系平衡的影响

比较(2-14)式和(2-3)式,可以发现:在重力的作用下,相对静力平衡位置的运动方程与无重力作用的运动方程具有相同的形式。因此,如果以静力平衡位置为基准建立运动方程式,就不必考虑重力的影响了。但是,在计算总的反应时,应将相应的静力分量叠加进去。

由于上述原因,在2.1节中,建立简支梁的运动方程时,均未考虑重力的影响,而是以相对于静力平衡位置的动位移作为基本变量来建立运动方程的。今后我们也采取相同的处理办法。值得注意的是,当求总挠度及总应力等量时,必须将动力分析的结果与相应的静力分析的结果相加。

2.3 支座扰动的影响

不仅动荷载会引起结构振动,结构支座的运动也会引起结构发生振动,地震是引起这类振动的典型例子。



(a) 单层厂房结构简图 (b) 平衡力系

图 2-4 支座扰动对单自由度体系平衡的影响

图2-4(a)表示一个单层厂房的结构简图。设水平梁的刚度比柱的刚度大得多,以致可以把梁的刚度 EI 看成无穷大,即把梁看作是刚性杆。假定柱脚嵌固在基础中,屋面及一部分柱子的质量集中于水平横梁上,而其余一部分柱子的质量则集中于柱脚。因此,可把柱子看成是无重杆,柱的压缩变形不计。两根柱子对水平相对位移的抗剪刚度相同,各为 $0.5k$; 横梁相对于地面作水平移动时的阻尼为 c , 如图示。设地面相对于固定参考轴的位移 $x_g(t)$ 为已知,其正向和横梁相对于地面位移 $x(t)$ 的正向也示于图中。用 x' 来表示质量相对于固定参考轴的位移,即总位移。由图2-4(a)可得

$$x' = x + x_g \quad (2-15)$$

取图2-4(b)所示隔离体,作用于隔离体上的力包括真实力 f_D 及 f_S 和按达朗贝尔原理确定的惯性力 f_1 。这些力构成平衡力系,于是有

$$f_1 + f_D + f_S = 0 \quad (2-16)$$

式中,阻尼力 f_D 和弹性力 f_S 与相对位移 x 有关,可以用(2-2)式来确定,但惯性力 f_1 与总位移 x' 有关,即

$$f_1 = m\ddot{x}' \quad (2-17)$$

因此(2-16)式变为

$$m\ddot{x}' + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2-18)$$

将(2-15)式对 t 微分两次, 代入上式, 运动方程成为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g(t) = p_{\text{eff}}(t) \quad (2-19)$$

在上面方程中, $p_{\text{eff}}(t)$ 表示由支座扰动引起的等效动荷载。与(2-3)式相比, 在地面加速度 $\ddot{x}_g(t)$ 作用下, 结构的运动方程与在外荷载 $p(t)$ 作用下的运动方程具有相同的形式, 但此时由地面加速运动引起的地震力(等效动荷载)为 $-m\ddot{x}_g(t)$ 。事实上, 地震扰动的输入方向是不定的, 因此加不加负号都无关紧要。

2.4 广义单自由度体系

以上讨论中涉及的单自由度体系的构造很简单。在实际应用中, 有一类结构, 其构造及模型看起来很复杂, 但经过仔细分析, 它们仍可归结为单自由度情况, 这就是所谓的广义单自由度体系。而广义单自由度体系又可细分为两种类型: 刚体集合型和分布柔度型。对于这两种情况, 通常假定只允许有某种单一形式的位移, 从而迫使结构的性质及状态像单自由度体系一样。

2.4.1 刚体集合型的广义单自由度体系

在刚体集合型结构中, 所允许的单一位移形式常常由刚体集合的构造所决定。换言之, 若干个刚体组成的结构, 由于受到支承和铰的约束, 最终仅允许发生一种位移。

在建立刚体集合的运动方程时, 结构的弹性和阻尼集中在各个元件上。当各元件对应的位移和速度确定后, 便可建立相应的弹性力和阻尼力的表达式。同样, 当某点有集中质量时, 通过几何关系求得该点的加速度后, 也可建立相应的惯性力表达式。但是, 对于具有分布质量的质块来说, 其惯性力分布在整个质块中(包括平移和转动的惯性力)。为了计算方便, 往往假定质块的质量和惯性矩都集中在质心处, 当求得质心的平移加速度和旋转加速度后, 便可确定相应的惯性力。就刚体集合特性而言, 惯性力的合力与分布惯性力等效。同样, 分布的外荷载可用它们的合力替代。

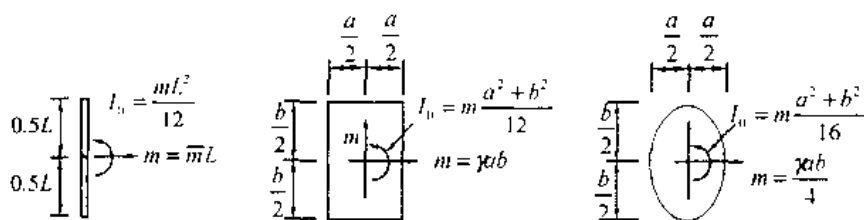


图 2-5 刚体质量和质量惯性矩

图2-5示出均质杆、矩形和椭圆形均质板刚体质量和质量惯性矩的计算方法, 图中 \bar{m} 和 γ 分别表示单位长度和单位面积上的质量。为便于计算其惯性力, 可只计算质心处的惯性力, 而质心处的平动和转动惯性力对应的广义质量分别为 m 和 I 。

例2-1 如图2-6所示某结构由两根刚杆(一根质量为 \bar{m} , 一根无重)及集中质量 m_2 , 弹

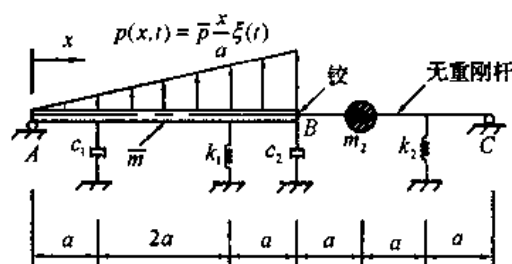


图 2-6 刚体集合单自由度体系例子

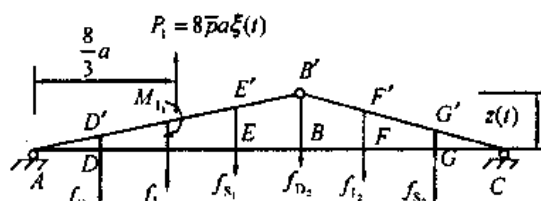


图 2-7 单自由度位移及合力

簧 k_1, k_2 , 阻尼 c_1, c_2 共7个元件组成。试用虚功分析建立运动方程, 设可能位移如图2-7。

[解] 以铰B处的上下运动 $z(t)$ 为基本量, 经分析, 作用于结构的各力及相应的虚位移示于表2-2。

表2-2 作用于图2-6结构的各力及相应的虚位移

作用于结构的力 f_i	相应的虚位移
$f_{S_1} = 0.75k_1 z(t)$	$\delta_{S_1} = 0.75\delta z$
$f_{S_2} = \frac{1}{3}k_2 z(t)$	$\delta_{S_2} = \frac{1}{3}\delta z$
$f_{D_1} = 0.25c_1 \dot{z}(t)$	$\delta_{D_1} = 0.25\delta \dot{z}$
$f_{D_2} = c_2 \dot{z}(t)$	$\delta_{D_2} = \delta \dot{z}$
集中质量惯性力 $f_{I_1} = \frac{2}{3}m_2 \ddot{z}(t)$	$\delta_{I_1} = \frac{1}{3}\delta \ddot{z}$
杆AB惯性合力 $f_{I_2} = 2a\bar{m}\ddot{z}(t)$	$\delta_{I_2} = 0.5\delta \ddot{z}$
杆AB惯性合力矩 $M_{I_1} = I_1 \ddot{\phi}(t)$	$\delta_{M_{I_1}} = \frac{\delta \ddot{z}}{4a}$
分布外力的合力 $P_1(t) = 8\bar{p}a\xi(t)$	$\delta_{P_1} = \frac{2}{3}\delta \ddot{z}$

将作用于该结构上的各力的虚功相加, 可得

$$\delta W = 0$$

$$P_1 \delta_{P_1} - (f_{S_1} \delta_{S_1} + f_{S_2} \delta_{S_2} + f_{D_1} \delta_{D_1} + f_{D_2} \delta_{D_2} + f_{I_1} \delta_{I_1} + f_{I_2} \delta_{I_2} + M_{I_1} \delta_{M_{I_1}}) = 0$$

经整理可得

$$M^* \ddot{z}(t) + C^* \dot{z}(t) + K^* z(t) = P^*(t)$$

其中, 广义质量 M^* 、广义阻尼 C^* 、广义刚度 K^* 及广义荷载 $P^*(t)$ 分别为

$$M^* = \frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2, \quad C^* = \frac{1}{16}c_1 + c_2,$$

$$K^* = \frac{9}{16}k_1 + \frac{k_2}{9}, \quad P^*(t) = \frac{16}{3}\bar{p}a\xi(t)$$

2.4.2 分布柔度型广义单自由度体系的近似求解——瑞利法

某些结构实际上具有无限个动力自由度,但当我们对这些结构给出一个适当变形假设后,则这些结构可近似地用解单自由度系统的方法求解。这种近似解法称为瑞利法。下面以图2-8所示的悬臂塔为例加以说明。

已知:

- ① 弯曲刚度为 $EI(x)$, 质量为 $m(x)$;
- ② 受地震地面运动 u_g 及顶部不变的竖直荷载 N 作用。

试求:

- ① 建立运动方程;
- ② 求临界屈服荷载。

[解] ① 悬臂塔的运动 $u(x, t)$ 可表示为

$$u(x, t) = \psi(x) \cdot z(t) \quad (a)$$

其中, $\psi(x)$ 为设定的形状函数, $z(t)$ 为广义坐标。

② 由哈密顿原理

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = 0 \quad (b)$$

其中

$$\text{动能 } T = 0.5 \int_0^L m(x) [\dot{u}'(x, t)]^2 dx \quad (c)$$

$$\text{弯曲势能 } V_1 = 0.5 \int_0^L EI(x) [u''(x, t)]^2 dx \quad (d)$$

$$\text{压缩势能 } V_2 = Ne(t) = -0.5N \int_0^L [u'(x, t)]^2 dx \quad (e)$$

③ 将(c)、(d)、(e)代入(b), 注意到 $u' = u + u_g$, 并经整理及分部积分可得

$$\int_{t_1}^{t_2} [M^* \ddot{z} + \bar{K}^* z - K_G^* z - P_{\text{eff}}^*(t)] z dt = 0$$

故有

$$M^* \ddot{z} + \bar{K}^* z = P_{\text{eff}}^*(t) \quad (f)$$

其中

$$\text{广义质量 } M^* = \int_0^L m(x) \psi^2(x) dx$$

$$\text{广义刚度 } \bar{K}^* = K^* - K_G^* = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx - N \int_0^L [\psi'(x)]^2 dx$$

$$\text{广义荷载 } P_{\text{eff}}^* = -\ddot{u}_g \int_0^L m(x) \psi(x) dx$$

④ 令 $\bar{K}^* = 0$ 可得压缩力的临界屈服值为

$$N_{\text{cr}} = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L [\psi'(x)]^2 dx}$$

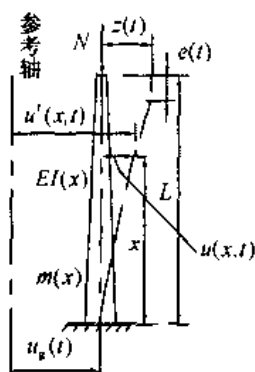


图 2-8 分布柔度型的广义单自由度体系

若取 $\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$ ，不难得出

$$M^* = 0.228\bar{m}L, K^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}, P_{\text{eff}}^*(t) = 0.364\bar{m}L\ddot{u}_g(t)$$

若不考虑轴力 N ，则该体系的运动方程为

$$0.228\bar{m}L^4\ddot{z} + 0.03125E\pi^4 z = 0.364\bar{m}L^4\ddot{u}_g(t)$$

2.5 自由振动反应

将广义单自由度体系的运动方程与简单单自由度体系的运动方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

进行比较，两者具有相同的形式，其区别在于简单单自由度体系的各物理量和未知函数 $x(t)$ 具有直观的物理意义，而广义单自由度体系是以广义的物理特性和广义位移 $z(t)$ 来表述的。因此，两个方程的解具有相同的形式，但讨论方程(2-3)的解是比较直观和方便的。

自由振动指的是施加于体系的外荷载 $p(t) = 0$ 时，由体系的初始位移或初始速度引起的振动。例如，用外力迫使图2-1(a)所示的质量偏离平衡位置即具有初始位移，然后突然释放，此时体系产生的振动就是自由振动。体系发生自由振动时，其运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2-20)$$

(2-20)式是二阶齐次线性的常微分方程。

设方程(2-20)的通解为指数函数

$$x(t) = Ge^{\lambda t} \quad (2-21)$$

式中， G 和 λ 为待定常数。将上式代入方程(2-20)，整理得

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)Ge^{\lambda t} = 0$$

两边除以 $mGe^{\lambda t}$ ，并引入记号

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2-22)$$

得特征方程

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega^2 = 0 \quad (2-23)$$

(2-23)式是关于 λ 的二次代数方程，可求得相应的两个特征根 λ_1 和 λ_2 ，这两个根的值都依赖于阻尼系数 c 的值。将这两个根代入(2-21)式，可得到位移反应的通解表达式

$$x(t) = G_1 e^{\lambda_1 t} + G_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2-24)$$

式中， G_1 和 G_2 为由体系的初始条件决定的待定常数。显然体系的位移反应也依赖于体系的阻尼值。下面我们分两种情况加以讨论。

2.5.1 无阻尼自由振动

如果体系没有阻尼，即 $c = 0$ ，特征方程(2-23)为

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

相应的特征根

$$\lambda_1 = i\omega, \quad \lambda_2 = -i\omega$$

式中, $i = \sqrt{-1}$ 为单位虚数。将这两个特征根代入(2-24)式, 得到位移反应的通解

$$x(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t}$$

利用欧拉方程

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t \quad (2-25)$$

可将位移反应写为实函数形式, 即

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2-26)$$

式中, A 和 B 为新的待定常数, 可由初始条件确定。将(2-26)式对时间 t 求导, 得到反应的速度表达式

$$\dot{x}(t) = A \omega \cos \omega t - B \omega \sin \omega t \quad (2-27)$$

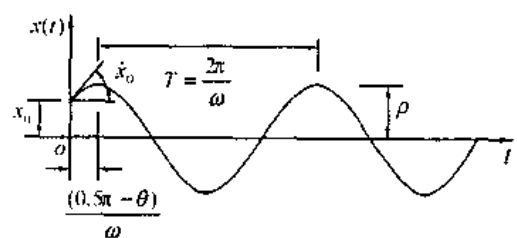


图 2-9 无阻尼自由振动反应

设 $t=0$ 时, 体系的初始位移 $x(0) = x_0$, 初始速度 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ 。将它们代入(2-26)和(2-27)两式, 可解得 $B = x_0$, $A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$ 。因此无阻尼单自由度体系的自由振动反应为

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \quad (2-28)$$

由上式可见, 无阻尼单自由度体系的位移反应是以平衡位置为中心的简谐运动(SHM)。它包括两部分: 一部分与 $\cos \omega t$ 成正比, 其值与体系的初位移 x_0 有关; 另一部分与 $\sin \omega t$ 成正比, 其值与体系的初速度 \dot{x}_0 有关。这两部分都是简谐运动, 其合成运动如图2-9所示, 也是一个简谐运动。

引入下述变换

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \rho \sin \theta \\ \frac{\dot{x}_0}{\omega} &= \rho \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

可将(2-28)式化简为一个三角函数的形式

$$x(t) = \rho (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) = \rho \sin(\omega t + \theta) \quad (2-30)$$

式中

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \quad (2-31a)$$

称为振幅, 表示质量偏离平衡位置的最大位移, 其值的大小表征体系振动的强弱; $\omega t + \theta$ 为相位角, θ 称为初相角, 它们的单位均为 rad (弧度)。初相角由下式确定

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} \right) \quad (2-31b)$$

质量的运动每重复一次的时间称为周期, 以 T 表示。在简谐运动的情况下, 每经过一个周期, 相位角增加 2π , 即

$$[\omega(t+T) + \theta] - (\omega t + \theta) = 2\pi$$

因此

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2-32)$$

单位时间内运动重复的次数称为频率，记作 f ，频率和周期互为倒数，即

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-33)$$

简谐运动的圆频率

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-34)$$

它表示 2π 时间内运动重复的次数，称为固有圆频率或固有频率。结构动力学中经常用到这个物理量，为了方便，以后也将 ω 简称为频率。其单位为 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ，或简记为 s^{-1} 。

由(2-34)式可见，频率 ω 只同体系的物理量(质量、刚度系数)有关，而与初始条件无关。频率 ω 、振幅 ρ 、初相角 θ 是体系振动的重要物理参数，常称为振动三要素。这三个物理参数一旦确定，则体系的简谐运动就完全确定了。

2.5.2 有阻尼自由振动

如果体系存在阻尼，即 $c \neq 0$ ，特征方程(2-23)的解为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2-35)$$

位移反应的通解由(2-24)式给出。体系的振动特性与(2-35)式右边根式的值有关，现讨论如下。

首先引入临界阻尼的概念。所谓临界阻尼 c_c 是指使(2-35)式中根式为零的那个阻尼系数，即

$$c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km} \quad (2-36)$$

引入无量纲阻尼比 ξ ，它表示体系的实际阻尼与临界阻尼之比，即

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2-37a)$$

这样阻尼系数又可写为

$$c = \xi c_c = 2m\omega\xi \quad (2-37b)$$

将(2-37a)式代入(2-35)式，得

$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})\omega \quad (2-38)$$

下面就 $\xi < 1.0$ ， $\xi = 1.0$ 和 $\xi > 1.0$ 三种情况加以讨论。

1) 低阻尼体系

当 $\xi < 1.0$ ，即体系的阻尼小于临界阻尼($c < 2m\omega$)时，称为低阻尼体系，其特征根为

$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})\omega \quad (2-39a)$$

令

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2-40)$$

ω_D 表示有阻尼体系的振动圆频率, 称为阻尼振动频率。通常结构的阻尼比 ξ 小于 0.20, 因此阻尼频率 ω_D 和无阻尼频率 ω 的差别是很小的。

将(2-40)式代入(2-39a)式, 则特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D \quad (2-39b)$$

由(2-24)式, 低阻尼体系位移反应的通解为

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t})$$

利用欧拉方程(2-25), 上式可写为更简便的形式

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2-41)$$

设体系的初始条件为 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, 并利用上式及其对时间 t 的导数, 可定出

$$A = \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}, \quad B = x_0$$

将这两个常数代回(2-41)式, 得

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega_D t \right] \quad (2-42)$$

与无阻尼情况相类似, 令

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} &= \rho \cos \theta \\ x_0 &= \rho \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-43)$$

可将(2-43)式化简为三角函数的形式

$$x(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t + \theta) \quad (2-44)$$

式中

$$\rho = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \right)^2 \right]^{0.5} \quad (2-45a)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega_D x_0}{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0} \right) \quad (2-45b)$$

现在比较一下无阻尼体系和有阻尼体系的自由振动反应: (2-30)式表明, 无阻尼体系发生自由振动时, 质量是以圆频率 ω 在其平衡位置附近作往复运动, 运动幅值始终保持不变, 这说明体系没有能量的损耗; 而(2-44)式表明, 有阻尼体系发生自由振动时, 质量是以不变的圆频率 ω_D 在其平衡位置附近作往复运动, 运动的幅值是按指数函数规律衰减, 这说明阻尼力不断地消耗能量, 使振动逐渐减弱, 直到完全消失。

可用任何方法起振, 最简单的方法是施加外力迫使质量偏离平衡位置, 然后突然释放, 使结构发生振动。这时体系发生的振动便是初始位移 $x(0) = x_0$, 初始速度 $\dot{x}(0) = 0$ 的自由振动。

在此情况下, 当 $t = 0$ 时, 位移达到极大值即 $x_{\max} \approx x_0$; (2-44)式中的正弦函数也达到极大值, 即 $\sin(\omega_D \cdot 0 + \theta) = 1$, 因此 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 从而位移反应为

$$x(t) = \rho e^{-\xi \omega t} \sin\left(\omega_D t + \frac{\pi}{2}\right) = \rho e^{-\xi \omega t} \cos \omega_D t \quad (a)$$

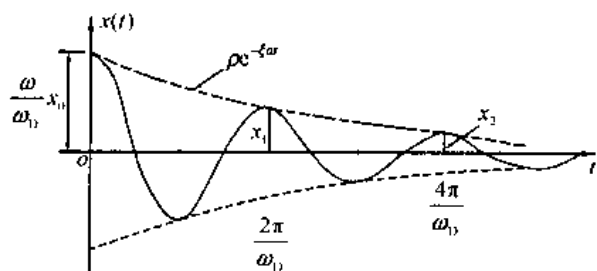


图 2-10 低阻尼体系自由振动反应

图2-10给出了上述情况下低阻尼体系的自由振动反应曲线。

实际结构的真实阻尼很复杂，通常只能用实验方法来确定。最简单的实验方法是测量阻尼体系任意两个相邻正波峰的位移值 x_n 和 x_{n+1} ，即 $t = \frac{2n\pi}{\omega_D}$ 和 $t = \frac{2(n+1)\pi}{\omega_D}$ 两个时刻的位移值，然后利用(a)式，可求出相邻峰值之比为

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \exp\left(2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D}\right) \quad (2-46)$$

两边取自然对数，得对数衰减率 δ

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \quad (2-47)$$

引入方程(2-40)后得

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2-48)$$

对小阻尼体系，对数衰减率可近似为

$$\delta \approx 2\pi\xi \quad (2-49)$$

在小阻尼条件下，方程(2-46)可展开为级数

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^\delta \approx e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi + \frac{(2\pi\xi)^2}{2!} + \dots \quad (2-50)$$

当 ξ 较小时，仅保留级数(2-50)式前两项就可以获得足够的精度。因此

$$\xi \approx \frac{x_n - x_{n+1}}{2\pi x_{n+1}} \quad (2-51)$$

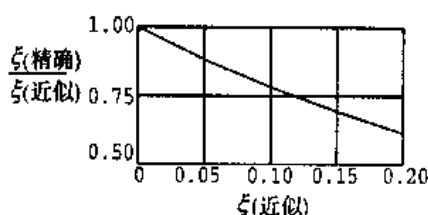


图 2-11 阻尼比修正系数

上式只能得到近似的阻尼比 ξ (近似)。为了求得精确的阻尼比 ξ (精确)，可用图2-11给出的阻尼比修正系数来加以修正。例如，若用(2-51)式算得 ξ (近似) 为 0.12，查图2-11知，此时 ξ (精确) 值与 ξ (近似) 值的比值为 0.75，因此 ξ (精确) 值为 0.09。

当阻尼较小，振幅衰减较慢时，取相隔几周(例如 j 周)的位移峰值来计算阻尼比可提高精度。这时(2-47)

式变为

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+j}} = 2j\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \quad (2-52)$$

而阻尼比可近似地表示为

$$\xi \approx \frac{x_n - x_{n+j}}{2\pi j x_{n+j}} \quad (2-53)$$

在工程结构的计算中, 阻尼比 ξ 常可采用工程图表所建议的数据, 如表2-3。

表2-3 若干工程结构材料的阻尼比值

结构类型	混凝土框架结构			钢框架结构			木框架及 剪切墙
	柔性内墙	砼及砖制的 剪切墙	柔性内墙 外包材料	焊接结点 柔性墙	焊接结点楼 板外包材料	铰接楼板 外包材料	
阻尼比 ξ	0.05	0.10	0.07	0.02	0.05	0.10	0.15

本表摘自“Seismic Design of Building Structure”, 6th edition, Michael R. Lindeburg, PE

为了计算方便, 需先讨论结构动力学几个常用物理量的单位。在结构动力学所涉及的国际单位制中, 长度、质量、时间为基本单位, 其余量均为导出单位。按国际单位制, 长度的单位为m(米), 质量的单位为kg(千克), 时间的单位为s(秒)。相应地, 位移的单位为m, 速度的单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 加速度的单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; 力的单位为N(牛顿)且 $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, 重量理解为重力, 具有力的单位; 刚度 k 的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, 刚度的倒数为柔度, 其单位为 $\text{m} \cdot \text{N}^{-1}$; 阻尼系数 c 的单位为 $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ 。为了简化数字的书写, 把力的单位写为kN(千牛), $1\text{kN} = 10^3 \text{N}$; 把长度单位写为cm(厘米), $1\text{cm} = 10^{-2} \text{m}$ 。在应用中, 应注意单位的换算。

若刚度单位取为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, 质量单位取为kg, 按(2-22)式 $\omega^2 = \frac{k}{m}$, 其单位为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} = (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} = \text{s}^{-2}$, 因此圆频率 ω 的单位为 s^{-1} 或 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

例2-2 一单层建筑物被理想化为图2-12所示的无重柱子支承的刚性横梁。为了确定结构的动力特性, 对它进行自由振动实验。当千斤顶给横梁施加的外力 $p = 90 \text{kN}$ 时, 测得横梁偏离平衡位置的位移 $x_0 = 0.5 \text{cm}$ 。若突然释放, 结构便产生自由振动。观察到结构往复摆动的周期为 1.4s , 第一周期的最大正位移 $x_1 = 0.4 \text{cm}$ 。根据这些数据计算结构的动力特性。

[解] ① 求横梁的等效重量 W 。

本例的荷载是缓慢施加的, 在外力作用期间是一个静力问题, 其平衡方程为 $kx_0 = p$, 因此两根立柱的总刚度

$$k = \frac{p}{x_0} = 1.80 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

如图示, 横梁的等效重 $W = mg$ 。这里 m 为横梁的等效质量, $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 为重力加速度。利用(2-32)式,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}}$$

从上式解出 W , 将已知数据代入得

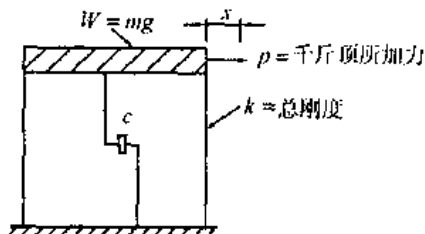


图 2-12 一个简单建筑物的振动实验

$$W = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 k \cdot g = \left(\frac{1.40}{2\pi} \right)^2 \times 1.80 \times 9.81 \times 10^4 = 8.77 \times 10^3 \text{ kN}$$

② 求振动频率。

由(2-33)和(2-34)两式, 有

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.40} = 0.714 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 4.488 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

③ 求阻尼特性。

利用已知数据, 由(2-47)、(2-49)、(2-37b)和(2-40)四式, 可得

$$\text{对数衰减率: } \delta = \ln \frac{x_0}{x_1} = \ln \frac{0.5}{0.4} = 0.223$$

$$\text{阻尼比: } \xi = \frac{\delta}{2\pi} = 3.55\%$$

$$\text{阻尼系数: } c = \xi c_c = 2\xi m\omega = 0.0355 \times \frac{2 \times 8.77 \times 10^3}{9.81} \times 4.488 = 2.85 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{阻尼频率: } \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 4.485 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \approx \omega$$

④ 求第6周的振幅。

由(2-52)和(2-46)两式, 有

$$\frac{x_n}{x_{n+j}} = \exp\left(2j\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D}\right) = \left[\exp\left(2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D}\right)\right]^j = \left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^j$$

所以

$$x_{n+j} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^j \cdot x_n$$

当 $n=0$, $j=6$ 时, 有

$$x_6 = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^6 \cdot x_0 = 0.131 \text{ cm}$$

2) 临界阻尼体系

当 $\xi = 1.0$, 即体系的阻尼等于临界阻尼($c = c_c = 2m\omega$)时, 称为临界阻尼体系。由方程(2-38)确定的特征根为两重根

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega \quad (2-54)$$

由微分方程知, 这时运动方程(2-24)的通解为

$$x(t) = (G_1 + G_2 t) e^{-\omega t} \quad (2-55)$$

假定体系的初始条件为 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ 。利用上式及其对时间 t 的导数, 可定出待定常数 G_1 和 G_2 。由此得临界阻尼体系位移反应的表达式

$$x(t) = e^{-\omega t} [x_0(1 + \omega t) + \dot{x}_0 t] \quad (2-56)$$

方程(2-56)的曲线如图2-13所示。从该图可以看

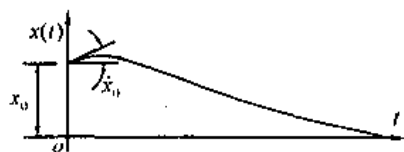


图 2-13 临界阻尼体系的自由振动反应

出, 临界阻尼体系自由振动的位移反应不包含在平衡位置附近的振动, 而是按照指数函数的规律衰减, 最后回复到零点。事实上临界阻尼是在自由反应中不出现振动的最小阻尼值。

3) 超阻尼体系

当 $\xi > 1.0$, 即体系的阻尼大于临界阻尼 ($c > 2m\omega$) 时, 称为超阻尼体系。此时特征根由 (2-38) 式给出, 它们是不含虚数项的两个负实根。位移反应的解为

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left(G_1 e^{\omega t \sqrt{\xi^2 - 1}} + G_2 e^{-\omega t \sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \quad (2-57)$$

式中, G_1 和 G_2 由初始条件确定, 其反应曲线与图 2-13 相似, 质量不会在平衡位置附近作往复运动, 位移反应逐渐减小到零。但是由于阻尼比增大, 返回平衡的速度变得更慢。

2.6 在简谐荷载作用下的反应

从本节起开始讨论单自由度体系的强迫振动。所谓强迫振动是指体系在随时间改变的外荷载作用下, 在荷载持续时间内的振动。外荷载包括直接作用于质量上的动荷载 $p(t)$ 和由于支座扰动引起的等效动荷载 $p_{\text{eff}}(t)$ (见 2.3 节)。

由 2.1 节知, 任何复杂体系, 当 $p(t) \neq 0$ 时, 其运动方程总可以写为微分方程 (2-3)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

微分方程 (2-3) 的通解为其对应的齐次方程 (2-20) 的通解 $x_c(t)$ 和它本身的一个特解 $x_p(t)$ 的线性组合

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (2-58)$$

事实上, $x_c(t)$ 就是在 2.5 节中讨论的自由振动反应。对无阻尼体系它由 (2-26) 式给出

$$x_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2-59)$$

对于阻尼体系, 它由 (2-41) 式给出

$$x_c(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2-60)$$

对这两种情况, 都只需要讨论方程 (2-3) 的特解 $x_p(t)$, 然后与相应的通解 $x_c(t)$ 叠加, 再由体系的初始条件定出待定系数 A 和 B , 就得到相应的强迫振动的位移反应表达式, 这是分析单自由度体系强迫振动的主要过程。

简谐荷载 $p(t) = p_0 \sin \omega t$ 是最简单的一种周期荷载。这里 p_0 为荷载幅值, 与时间 t 无关; ω 为动荷载的圆频率, 例如旋转机械运转时引起的不平衡力就属于这种荷载。虽然在实际中简谐荷载存在的场合较少, 但它揭示的一些规律和特性具有普遍意义, 是分析研究更一般、更复杂振动问题的基础, 为此我们先讨论这种荷载引起的强迫振动。

在简谐荷载作用下, 体系的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p_0 \sin \omega t \quad (2-61)$$

由 (2-60) 式可见, 在低阻尼情况下方程 (2-61) 的通解项 $x_c(t)$ 是按指数函数规律衰减的振动, 振动的频率只与体系本身的物理特性有关, 而与荷载的性质无关。这一项只在振动开始的一段时间内才有意义, 因此称为瞬态反应。在下面的讨论中我们将看到, 方程 (2-61) 的特解项 $x_p(t)$ 是与荷载 $p(t)$ 同频率且同时存在的简谐振动, 因此称为稳态反应。

下面先讨论无阻尼体系和阻尼体系在简谐荷载作用下的反应，然后再讨论两种体系的共振反应。

2.6.1 无阻尼体系

如果体系没有阻尼，运动方程(2-61)为

$$m\ddot{x} + kx = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2-62)$$

这个方程的通解为(2-59)式所表达的自由振动反应，其特解是一个与荷载 $p(t)$ 同频率、同相位角的简谐量， $\bar{\omega}$ 表示荷载频率。因此，可以假定

$$x_p(t) = G \sin \bar{\omega} t \quad (2-63)$$

待定的振幅 G 可由下述方法确定；将(2-63)式代入方程(2-62)，整理得

$$G(-m\bar{\omega}^2 + k) \sin \bar{\omega} t = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

上式对任意时刻 t 都成立，因此

$$G(-m\bar{\omega}^2 + k) = p_0$$

两边除以 k ，由(2-22)式，有

$$G \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \right) = \frac{p_0}{k}$$

以 β 来表示荷载频率与自由振动固有频率的比

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (2-64)$$

因此特解的反应振幅为

$$G = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

将上式代入(2-63)式，然后与(2-59)式的通解叠加，得无阻尼体系位移反应的通解

$$x(t) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega} t \quad (2-65)$$

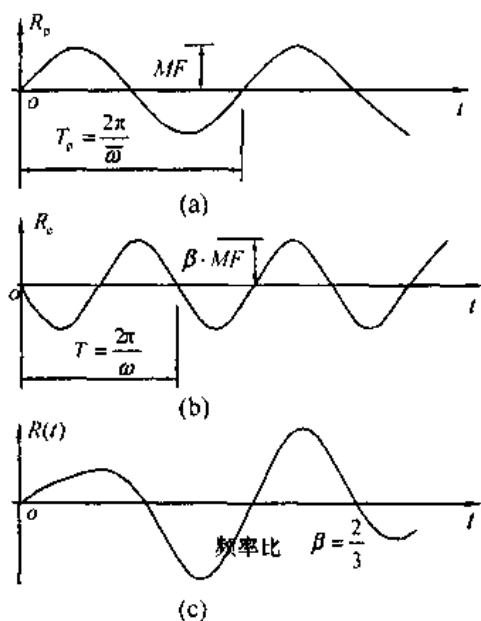
式中，系数 A 和 B 由初始条件决定。假定体系从静止状态开始振动，即 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ，将这个初始条件代入(2-65)式及其对时间 t 的导数，可得

$$A = -\frac{p_0 \beta}{k(1 - \beta^2)}, \quad B = 0$$

从而无阻尼体系的反应为

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \alpha x}{1 - \beta^2} \quad (2-66)$$

式中，第一项为稳态反应，第二项为瞬态反应； $\frac{p_0}{k}$ 为静位移 x_{st} ，即将静荷载 p_0 作用于体系所产生的位移； $\frac{1}{1 - \beta^2}$ 为动力放大系数(MF)，即稳态反应的幅值与静位移的比值。稳态反应的振动频率是施加荷载的频率，无论体系有无阻尼，稳态项都将保持下去；瞬态反应是由初始条件引起的自由振动，有时又被称为伴随自由振动，振动的频率为体系的固有频率。



(a) 稳态 (b) 瞬态 (c) 总反应

图 2-14 简谐荷载作用下从静止开始的反应比

率。由于实际结构总是有阻尼存在, 因此自由振动项将随时间的推移而逐渐消失。自由振动持续时间的长短取决于阻尼的大小。阻尼小, 持续时间长; 阻尼大, 持续时间短。当然在目前这种理想的无阻尼条件下, 自由振动是不会消失的。对有阻尼体系, 自由振动消失后, 体系就进入稳态反应。

现定义反应比 $R(t)$ 为动力反应和相应静位移的比值

$$R(t) = \frac{x(t)}{x_{st}} = \frac{k}{p_0} x(t) \quad (2-67)$$

由(2-66)式, 初始条件为零的无阻尼体系在简谐荷载作用下的反应比为

$$R(t) = \frac{\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t}{1 - \beta^2} \quad (2-68)$$

图2-14给出了初始条件为零的无阻尼体系在简谐荷载作用下的反应比特性。假定荷载

频率与自由振动频率比为 $\beta = \frac{2}{3}$, 图2-14(a)为稳态分量, 图2-14(b)为瞬态分量。图2-14(c)为这两个分量的和, 即反应比 $R(t)$ 。从图中可以看出: ① 两个分量有时而同相、时而反相的趋势; ② 当 $t=0$ 时, $R(t)$ 的斜率为零, 这表示瞬态项和稳态项的反应速度正好相互抵消, 因而初始速度为零的条件得到满足。

2.6.2 阻尼体系

如果体系阻尼不为零, 将运动方程(2-61)两边除以 m , 利用(2-37a)式, 有 $\frac{c}{m} = 2\xi\omega$, 可得

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega} t \quad (2-69)$$

当阻尼小于临界阻尼时, 这个方程的通解 $x_c(t)$ 为(2-60)式给出的阻尼体系的自由振动反应。简谐荷载作用下的特解可假定为如下形式

$$x_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t \quad (2-70)$$

由于阻尼体系的反应一般不与荷载同相, 因此式中包含第二项。

将(2-70)式代入方程(2-69), 整理可得

$$\begin{aligned} & (-G_1 \bar{\omega}^2 - 2G_2 \bar{\omega} \xi \omega + G_1 \omega^2) \sin \bar{\omega} t + \\ & (-G_2 \bar{\omega}^2 + 2G_1 \bar{\omega} \xi \omega + G_2 \omega^2) \cos \bar{\omega} t = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega} t \end{aligned}$$

这是一个三角恒等式, 对于任意时刻 t 等式均成立, 必然有等式两边 $\sin \bar{\omega} t$ 和 $\cos \bar{\omega} t$ 的系数分别相等, 即

$$\begin{aligned} -G_1\bar{\omega}^2 - 2G_2\bar{\omega}\xi\omega + G_1\omega^2 &= \frac{p_0}{m} \\ -G_2\bar{\omega}^2 + 2G_1\bar{\omega}\xi\omega + G_2\omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

用 ω^2 去除这两个方程, 利用(2-22)和(2-64)两式, 合并同类项得

$$\begin{aligned} (1-\beta^2)G_1 - (2\xi\beta)G_2 &= \frac{p_0}{k} \\ (2\xi\beta)G_1 + (1-\beta^2)G_2 &= 0 \end{aligned}$$

求解上述联立方程组, 可得系数

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{p_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ G_2 &= \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{aligned}$$

将它们代入特解表达式(2-70), 然后再与通解(2-60)式组合, 可得位移反应的通解

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\xi\omega t} (A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t) + \\ &\quad \frac{p_0}{k} \frac{(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega}t}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{aligned} \quad (2-71)$$

上式等号右边第一项的常数 A 和 B 由给定的初始条件确定。这一项为瞬态反应项, 由于阻尼项会很快消失, 这里略去不考虑它。等号右边第二项为稳态反应项, 其幅值与初始条件无关, 而振动频率与荷载相同, 但相位角不同, 很容易将此项化为一个三角函数的形式, 令

$$\begin{aligned} 1-\beta^2 &= \bar{\rho}\cos\theta \\ 2\xi\beta &= \bar{\rho}\sin\theta \end{aligned}$$

可知 $\bar{\rho} = [(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{0.5}$ 。将上式代入(2-71)式的第二项, 可得体系的稳态反应为

$$x(t) = \rho\sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (2-72)$$

式中, ρ 为稳态反应的振幅, θ 为反应滞后于荷载的相位角。其值分别为

$$\rho = \frac{p_0}{k} [(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{0.5} \quad (2-73a)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right) \quad (2-73b)$$

θ 的定义域为 $0 < \theta < \pi$ 。反应的振幅 ρ 与静位移 $x_{st} = \frac{p_0}{k}$ 的比值定义为动力放大系数, 并用 D 表示

$$D = \frac{\rho}{x_{st}} = [(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{0.5} \quad (2-74)$$

对于不同的阻尼比 ξ , 利用(2-74)和(2-73b)两式, 可分别作出动力放大系数 D 和相位角 θ 随频率比 β 的变化曲线。这些关系曲线分别示于图2-15和图2-16。

从图2-15可以看出, 当阻尼比 $\xi = 0.7$, $0 < \beta < 0.6$ 时, 放大系数 D 接近于常量。这为设计地震加速度计提供了方便。

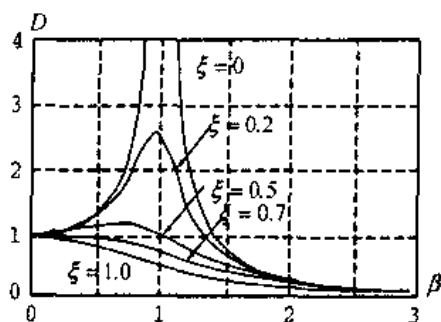


图 2-15 动力放大系数与频率比的关系曲线

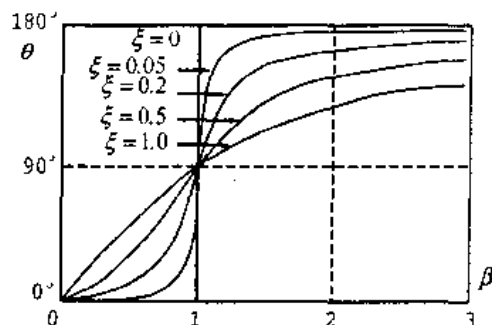


图 2-16 相位角与频率比的关系曲线

例2-3 一种携带式激振器可在现场测定结构的动力特性。用这种激振器对某结构施加幅值 $p_0 = 2.50 \text{ kN}$ 的简谐荷载，但两次施加的频率不同，分别测得

① $\bar{\omega}_1 = 16.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\rho_1 = 1.83 \times 10^{-2} \text{ cm}$, $\theta_1 = 15.0^\circ$;

② $\bar{\omega}_2 = 25.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\rho_2 = 3.68 \times 10^{-2} \text{ cm}$, $\theta_2 = 55.0^\circ$ 。

试利用这些数据确定单自由度体系的质量、阻尼和刚度。

【解】 为了利用这些数据，首先用(2-73b)式对(2-73a)式进行改造

$$\rho = \frac{x_{st}}{1 - \beta^2} \left[1 + \left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right)^2 \right]^{-0.5} = \frac{x_{st}}{1 - \beta^2} (1 + \tan^2 \theta)^{-0.5} = \frac{x_{st}}{1 - \beta^2} \cos \theta \quad (\text{a})$$

再进一步简化上式，有

$$k(1 - \beta^2) = k - \bar{\omega}^2 m = \frac{p_0}{\rho} \cos \theta$$

然后引入两组实验数据，可得如下方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -16^2 \\ 1 & -25^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = 2.5 \begin{bmatrix} \frac{\cos 15^\circ}{1.83 \times 10^{-4}} \\ \frac{\cos 55^\circ}{1.83 \times 10^{-4}} \end{bmatrix}$$

由此可解得

$$k = 1.97 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}, \quad m = 2.52 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

重量为

$$W = mg = 247 \text{ kN}$$

固有频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27.9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

由上述(a)式和(2-73b)式分别可得

$$\cos \theta = \frac{k}{p_0} \rho (1 - \beta^2), \quad \cos \theta = \frac{1 - \beta^2}{2\xi\beta} \sin \theta$$

令这两个 $\cos \theta$ 的表达式相等，注意到 $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $k = m\omega^2$ 可解出阻尼比

$$\xi = \frac{p_0 \sin \theta}{2\beta k \rho} = \frac{p_0 \sin \theta}{c_c \bar{\omega} \rho}$$

用第一组试验数据可得阻尼为

$$c = \xi c_c = 2.21 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

阻尼比为

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c\omega}{2k} = 15.7\%$$

用第②组试验数据也可以得到相近的结果。

2.6.3 共振反应

从图2-15可以看出, 对于小阻尼体系 ($\xi < 0.2$), 稳态反应的峰值出现在频率比接近于1的地方。当频率比 $\beta = 1$, 通常称荷载频率等于固有频率时体系处于共振状态。对于无阻尼体系, 从方程(2-68)可见, 共振时稳态反应将趋于无穷大。对于有阻尼体系, 由方程(2-74)可求出共振时动力放大系数与阻尼比成反比

$$D_{\beta=1} = \frac{1}{2\xi} \quad (2-75)$$

这个值只是接近于动力放大系数的最大值, 并不是它的最大值。为了求得动力放大系数的最大值, 可利用方程(2-74), 由 $\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0$, 求得当 $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 反应峰值发生在频率比

$$\beta_{\text{eq}} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (2-76a)$$

处, 相应的动力放大系数的峰值为

$$D_{\text{max}} = \left[2\xi \sqrt{1 - \xi^2} \right]^{-1} \quad (2-76b)$$

由于通常的阻尼比是很小的, 因此可以用(2-75)式来近似 D_{max} 。

现在用(2-71)式来建立包含瞬态项和稳态项的共振反应表达式。当 $\beta = 1$ 时, 该位移方程变为

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) - \frac{x_{st}}{2\xi} \cos \omega t \quad (2-77)$$

假定体系的初始条件为 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, 可定出常数

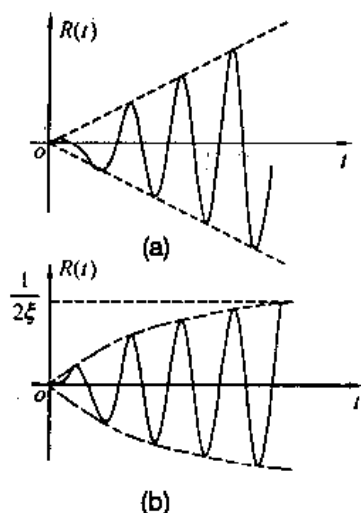
$$A = \frac{\omega}{2\omega_D} x_{st} = \frac{x_{st}}{2\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad B = \frac{x_{st}}{2\xi}$$

将这两个常数代入(2-77)式, 位移反应方程为

$$x(t) = \frac{x_{st}}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\xi \sin \omega_D t}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \cos \omega_D t \right) - \cos \omega t \right] \quad (2-78)$$

在小阻尼情况下, 上式中 $\sin \omega_D t$ 的幅值要比 $\cos \omega_D t$ 的幅值小得多, 因此正弦项可以忽略不计; 此外, $\omega_D \approx \omega$, 故小阻尼体系的反应比近似为

$$R(t) = \frac{x(t)}{x_{st}} \approx \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t \quad (2-79)$$


 (a) 无阻尼体系 (b) 阻尼体系
图 2-17 静止初始条件下共振反应

当阻尼为零时, 体系的反应比由(2-68)式给出。但共振时 $\beta=1$, 该式成为 $\frac{0}{0}$ 的不定形式, 这时应用罗必达法则可求得相应的反应比

$$R(t) = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{d\beta}(\sin\beta\alpha t - \beta\sin\alpha t)}{\frac{d}{d\beta}(1 - \beta^2)} = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{-1}{2\beta} (\alpha \cos\beta\alpha t - \sin\alpha t) = 0.5(\sin\alpha t - \alpha \cos\alpha t) \quad (2-80)$$

方程(2-79)和(2-80)的曲线如图2-17所示。从图上可以看出, 无论体系有没有阻尼, 反应都是逐渐增加的。但在阻尼体系中, 阻尼限制了共振反应的振幅无限地增大。在无阻尼体系中, 反应幅值不断增加, 每完成一个周期,

时间 t 增加 $\frac{2\pi}{\omega}$, 幅值增加一个 π 值, 最后必然导致体系破坏。

2.7 在任意周期荷载作用下的反应

我们在2.6节讨论了单自由度体系在简谐荷载作用下的位移反应。但是实际荷载往往不是这种简单的正弦荷载, 因此本节和其后两节讨论单自由度体系在较为常见的动力荷载和任意动力荷载作用下的位移反应。

图2-18示出了一个任意的周期荷载 $p(t)$, 这是一个周期函数, 其周期为 T_p 。为了书写简便, 以 $\bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_p}$ 来表示荷载傅里叶级数的基频(最低频率), 以 $\omega_n = n\omega_1 = \frac{2n\pi}{T_p}$ 来表示级数的第 n 个频率, 则可以

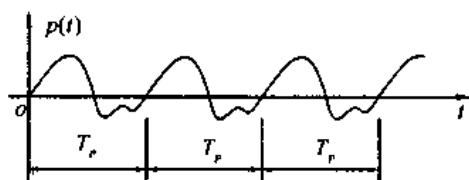


图 2-18 任意周期性荷载

把周期荷载展开成傅里叶级数

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t \quad (2-81)$$

利用三角函数的正交性, 可得级数中各项的系数为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \bar{\omega}_n t dt \\ b_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \bar{\omega}_n t dt \end{aligned} \right\} \quad (2-82)$$

由于体系是线弹性的, 因此可以分别求出体系对于荷载级数每一项的反应, 然后利用

叠加原理, 把对于各个荷载项的反应相加, 就求出体系对于周期性荷载 $p(t)$ 的总反应。应当指出, 随着频率的升高, 荷载项的幅值迅速减少, 它对于总反应的影响也迅速减小, 因此只需计算级数(2-81)中有限项的反应, 就可达到精度要求, 而不用去考虑高频项的影响。

考虑荷载级数(2-81)的第 n 个正弦项, 该项的表达式说明对应的荷载幅值为 b_n , 频率为 $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1$, 因此频率比为

$$\beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega}$$

利用方程(2-66), 该项在无阻尼体系中引起的稳态反应为

$$x_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \sin n\bar{\omega}_1 t \quad (2-83a)$$

同样, 对于级数的第 n 个余弦项的稳态反应为

$$x_n(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \cos n\bar{\omega}_1 t \quad (2-83b)$$

对于常量荷载分量的稳态反应正好是静挠度

$$x_{st} = \frac{a_0}{k} \quad (2-83c)$$

利用叠加原理, 无阻尼体系对于周期性荷载 $p(t)$ 的总反应为

$$x(t) = \frac{1}{k} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\bar{\omega}_1 t + b_n \sin n\bar{\omega}_1 t}{1 - \beta_n^2} \right) \quad (2-83d)$$

式中, 级数各项的系数由(2-82)式给出。

对于有阻尼体系, 可利用(2-71)式, 仿照上述方法, 分别求出对于荷载级数每一项的稳态反应, 然后叠加起来, 求得总的稳态反应为

$$x(t) = \frac{1}{k} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2a_n \xi \beta_n + b_n(1 - \beta_n^2)] \sin n\bar{\omega}_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[a_n(1 - \beta_n^2) - b_n 2\xi \beta_n] \cos n\bar{\omega}_1 t}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi \beta_n)^2} \right\} \quad (2-84)$$

例2-4 图2-19示出了一个理想化的单自由度体系及其所承受的周期荷载, 该荷载由单个正弦半波组成。假定图2-19所示结构是无阻尼的, 且 $\beta_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{\omega} = 0.75$, $\beta_2 = \frac{2\bar{\omega}_1}{\omega} = 2\beta_1 = 1.5$ 。试分析这一结构的稳态反应。

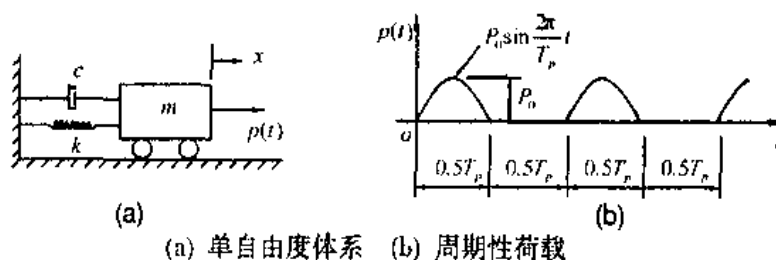


图 2-19 周期性荷载反应分析例子

[解] 利用方程(2-82), 可求出此荷载傅里叶级数展开式的系数

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{0.5T_p} p_0 \sin \bar{\omega}_1 t dt = \frac{p_0}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{0.5T_p} p_0 \sin \bar{\omega}_1 t \cos \bar{\omega}_n t dt = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数;} \\ \frac{2p_0}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ 为偶数。} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{0.5T_p} p_0 \sin \bar{\omega}_1 t \sin \bar{\omega}_n t dt = \begin{cases} \frac{p_0}{2}, & n=1; \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

将这些系数代入方程(2-81), 可得到给定周期荷载的傅里叶表达式

$$p(t) = \frac{p_0}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \bar{\omega}_1 t - \frac{2}{3} \cos 2\bar{\omega}_1 t - \frac{2}{15} \cos 4\bar{\omega}_1 t - \dots \right)$$

将上式及所给出的傅里叶级数各项的系数和频率比 β_1, β_2 的具体数值代入(2-83)式, 可得出结构的稳态反应为

$$x(t) = \frac{p_0}{k\pi} \left(1 + \frac{8\pi}{7} \sin \bar{\omega}_1 t + \frac{8}{15} \cos 2\bar{\omega}_1 t + \frac{1}{60} \cos 4\bar{\omega}_1 t + \dots \right)$$

如果结构是有阻尼的, 其分析过程完全相类似, 只需将具体数值代入(2-84)式即可。

2.8 在冲击荷载作用下的反应

2.8.1 冲击荷载反应的一般性质

冲击荷载是持续时间很短的荷载。当荷载作用的时间小于或略大于结构的自振周期时, 就可以将其看作为冲击荷载。图2-20示出了一个一般冲击荷载的例子。对于某些结构(例如货车、汽车、桥或吊车等)来说, 在设计过程中往往要考虑这种荷载。对于结构设计来说, 由冲击荷载所引起的最大反应往往比全部反应过程更为重要, 其原因在于荷载作用时间很短, 阻尼力还来不及从结构中吸收较多的能量, 结构的最大反应就已经达到了, 因此阻尼在这里就显得不太重要了。由于这个原因, 本节仅考虑无阻尼体系对于冲击荷载的反应。

在以下的讨论中, 我们将得知: 单自由度系统对冲击荷载的反应主要与冲击荷载的类型以及冲击荷载持续时间与结构的固有周期的比值有关。由于冲击荷载常会引起结构的严重破坏, 在设计中必须加以重视。通常可采用以下三种途径来减少冲击荷载的破坏性:

- ① 加强系统;
- ② 降低冲击的冲量;
- ③ 采取隔离保护措施。

冲击在结构动力逆分析——模态分析中有着广泛的应用。

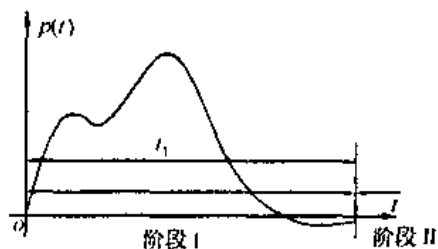
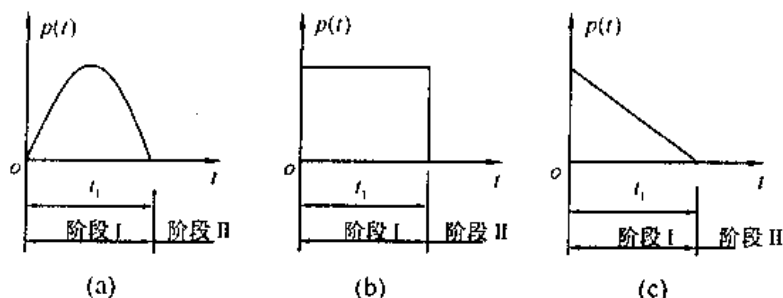


图 2-20 任意冲击荷载

2.8.2 各种脉冲波的动态响应分析

冲击荷载变化形式众多, 图2-20及图2-21是其中经简化的几种脉冲形式。



(a) 正弦半脉冲 (b) 矩形脉冲 (c) 三角形脉冲

图 2-21 几种简化的脉冲形式

1) 求解冲击荷载反应的方法

分析结构对于冲击荷载的反应应按两个阶段进行。第 I 阶段为有荷载作用的强迫振动。在此阶段中，假定荷载持续时间为 t_1 ，那么当 $0 \leq t \leq t_1$ 时，结构的运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = p(t) \quad (2-85)$$

这时只要求得方程的一个特解 $x_p(t)$ ，再与(2-26)式给出的通解组合，便得到运动方程的通解。然后再利用初始条件确定待定常数，就得到这个阶段的位移反应了。第 II 阶段 ($t > t_1$) 为无荷载作用的自由振动，其初始条件为阶段 I 终时刻的位移 $x(t_1)$ 和速度 $\dot{x}(t_1)$ ，只要利用前一阶段的结果，便可由(2-28)式确定阶段 II 的位移反应。

2) 正弦半波脉冲冲击荷载的反应分析

图2-21(a)示出了一个正弦半波脉冲荷载。在阶段 I 结构受简谐荷载，假定结构从静止开始运动，方程(2-66)给出了此阶段的位移反应为

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{(\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \alpha t)}{1 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (2-86)$$

在阶段 II 结构进行自由振动，其初始条件为 $x_0 = x(t_1)$ 和 $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_1)$ 。为了计算方便，引入新的时间变量 $\bar{t} = t - t_1$ 。利用(2-28)式，可得阶段 II 的位移反应为

$$x(\bar{t}) = \frac{1}{\omega} \dot{x}(t_1) \sin \alpha \bar{t} + x(t_1) \cos \alpha \bar{t}, \quad \bar{t} \geq 0 \quad (2-87)$$

一般来说，冲击荷载引起的最大反应比全部反应过程更有意义。

如果最大反应发生在阶段 I，为了确定反应峰值发生的时刻，将方程(2-86)对时间 t 求导，并令其导数等于零

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0}{k} \frac{\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t - \bar{\omega} \cos \alpha t}{1 - \beta^2} = 0$$

由此可得

$$\bar{\omega} t = 2n\pi \pm \alpha t, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2-88)$$

注意到这个表达式仅在 $\alpha t \leq \pi$ 才正确，即最大反应出现在冲击荷载作用时间内。同时注意到当荷载频率 $\bar{\omega}$ 趋近于结构自振频率 ω 时，对结构是最不利的。综上所述，可在(2-88)式中取 $n=1$ ，而在该式右边取负号，可得

$$\bar{\omega}t = \frac{2\pi}{1 + \frac{\omega}{\bar{\omega}}} \quad (2-89)$$

最大反应值可将(2-89)式代入(2-86)而得到, 注意这个结果仅当 $\bar{\omega}t < \pi$ 以及 $\bar{\omega} < \omega$ 时才是正确的。

对持续时间短的正弦波脉冲, 当 $\beta > 1$ ($\bar{\omega} > \omega$) 时, 最大反应发生在阶段 II。这一阶段的初始位移和初速度可将 $t_1 = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$ 代入(2-86)式及其导数表达式得到

$$x_0 = x(t_1) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \left(0 - \beta \sin \frac{\pi}{\beta} \right)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(t_1) = \frac{p_0}{k} \frac{\bar{\omega}}{1 - \beta^2} \left(-1 - \beta \cos \frac{\pi}{\beta} \right)$$

由方程(2-31a), 此阶段自由振动的位移幅值为

$$\rho = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 \right]^{0.5} = \frac{p_0}{k |1 - \beta^2|} \beta \left(2 + \cos \frac{\pi}{\beta} \right)^{0.5} =$$

$$\frac{p_0}{k} \frac{2\beta}{|1 - \beta^2|} \cos \frac{\pi}{2\beta}$$

动力放大系数为

$$D = \frac{k\rho}{p_0} = \frac{2\beta}{|1 - \beta^2|} \cos \frac{\pi}{2\beta}, \quad \beta > 1, t > t_1 \quad (2-90)$$

3) 矩形脉冲荷载的反应分析

将图2-21(b)所示的矩形脉冲分为两个阶段。

在阶段 I 期间, 突然施加幅值为 p_0 的常荷载, 这个荷载又称为阶跃荷载。阶跃荷载的特解为静位移

$$x_{st} = \frac{p_0}{k} \quad (2-91a)$$

将这个特解和方程(2-26)给出的通解相结合, 很容易得到从静止开始振动的位移反应

$$x(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t), \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (2-91b)$$

在阶段 II, 结构发生自由振动, 其反应再次由方程(2-87)给出

$$x(\bar{t}) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + x(t_1) \cos \omega \bar{t}, \quad \bar{t} = t - t_1 \geq 0 \quad (2-92)$$

从(2-91b)式看, 显然当 $\omega t = \pi$, 即 $t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{2}T$ 时, 位移反应达到极大值 $x_{\max} = \frac{2p_0}{k}$ 。

因此当荷载持续时间 $t_1 \geq \frac{1}{2}T$, 即 $\frac{t_1}{T} \geq \frac{1}{2}$ 时, 矩形脉冲为长持续时间的荷载, 最大反应发生在阶段 I, 动力放大系数为 2。

对于持续时间短的荷载, 最大反应发生在阶段 II 的自由振动期间。首先利用(2-91b)式求得阶段 I 的运动速度

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0 \omega}{k} \sin \omega t \quad (2-93)$$

然后由(2-91b)式和上式确定阶段 I 终时刻的位移 $x(t_1)$ 和速度 $\dot{x}(t_1)$ ，把它们作为阶段 II 的初始位移 x_0 和初始速度 \dot{x}_0 。由(2-31a)式，阶段 II 的反应幅值为

$$\begin{aligned} \rho = x_{\max} &= \left[x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega} \right)^2 \right]^{0.5} = \\ &= \frac{p_0}{k} \left(1 - 2 \cos \omega t_1 + \cos^2 \omega t_1 + \sin^2 \omega t_1 \right)^{0.5} = \\ &= 2 \frac{p_0}{k} \left(\frac{1 - \cos \omega t_1}{2} \right)^{0.5} = 2 \frac{p_0}{k} \sin \frac{1}{2} \omega t_1 \end{aligned}$$

注意到 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ，相应的动力放大系数

$$D = \frac{k\rho}{p_0} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{T}, \quad \frac{t_1}{T} \leq \frac{1}{2} \quad (2-94)$$

因此当 $\frac{t_1}{T} \leq \frac{1}{2}$ 时，动力放大系数是一个正弦函数，它随脉冲时间与固有周期之比 $\frac{t_1}{T}$ 而变化。

三角形脉冲的反应，我们亦可用相同的方法作出讨论。感兴趣的读者可参考文献[1]。

2.8.3 反应谱及震动谱

由上述讨论可知：无阻尼单自由度结构由给定的冲击荷载形式所引起的最大反应仅仅依赖于脉冲的持续时间与结构的固有周期的比值 $\frac{t_1}{T}$ 。因此，我们可以画出三种脉冲荷载的放大系数 D 与脉冲长度比 $\frac{t_1}{T}$ 的关系曲线，如图2-22所示。图中的曲线又称为冲击荷载的位移反应谱或简称为反应谱。

利用反应谱可以在工程允许的精度内，计算体系在给定脉冲作用下的最大位移反应和最大弹性力。

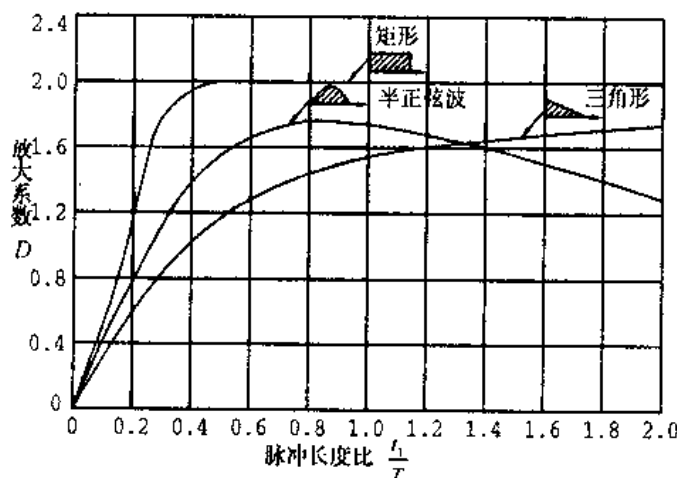


图 2-22 三种脉冲型式的位移反应谱(震动谱)

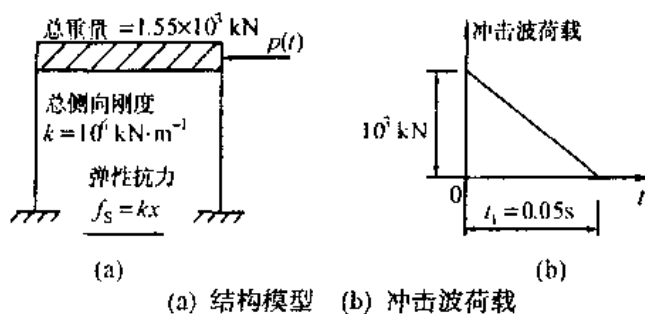


图 2-23 承受冲击荷载的单自由度建筑物

例2-5 图2-23示出了某单层建筑的理想化模型和所承受的荷载。试计算该荷载引起的最大弹性力。

[解] 根据给定数据，可确定体系的固有周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}} = 2\pi \sqrt{\frac{1.55 \times 10^3}{10^6 \times 9.81}} = 0.079 \text{ s}$$

因此，脉冲长度比为

$$\frac{t_l}{T} = \frac{0.05}{0.079} = 0.630$$

从图2-22可查得动力放大系数为 $D = 1.33$ ，因此最大位移为

$$x_{\max} = \frac{Dp_0}{k} = 0.133 \text{ cm}$$

由它所引起的最大弹性力为

$$f_{s,\max} = kx_{\max} = 10^4 \times 0.133 = 1.33 \times 10^3 \text{ kN}$$

如果脉冲作用时间为上述作用时间的 $\frac{1}{10}$ ，即 $t_l = 0.005 \text{ s}$ ，则其脉冲长度比为 $\frac{t_l}{T} = 0.063$ ，动力放大系数 $D = 0.44$ ，产生的弹性恢复力仅为 440 kN。由此可见，对于持续时间短的荷载来说，作用荷载的大部分为结构惯性力所抵消，因而它在结构中所产生的应力要小得多。

图2-22所示曲线也可以用来计算由地基脉冲加速度所引起的结构最大加速度。假定作用于地基的脉冲加速度为 $\ddot{x}_g(t)$ ，其最大值为 \ddot{x}_{g_0} 。由方程(2-19)可见，如果不计正负号，由该地基加速度引起的等效荷载为 $p_{\text{eff}}(t) = m\ddot{x}_g(t)$ ，该荷载最大值为 $m\ddot{x}_{g_0}$ ，它相当于前述几种冲击荷载的幅值 p_0 。此时，动力放大系数可用质量相对于地基的相对位移的最大值 x_{\max} 表示为

$$D = \frac{kx_{\max}}{p_0} = \frac{|kx_{\max}|}{|m\ddot{x}_{g_0}|} \quad (2-95)$$

由方程(2-18)，在无阻尼条件下，质量的运动方程为

$$m\ddot{x}_i + kx = 0$$

这说明在无阻尼体系里，质量的总惯性力 $m\ddot{x}_i$ 与作用于它的弹性力 kx 大小相等，方向相反。当两者都达到极大值时，有

$$|m\ddot{x}_{i,\max}| = |kx_{\max}|$$

将上式代入(2-91)式，得

$$D = \frac{\left| \frac{kx_{\max}}{m\ddot{x}_{g0}} \right|}{\left| \frac{m\ddot{x}_{i,\max}}{m\ddot{x}_{g0}} \right|} = \frac{\left| \ddot{x}_{i,\max} \right|}{\left| \ddot{x}_{g0} \right|} \quad (2-96)$$

上式说明：如果不计正负号，动力放大系数等于质量总加速度的最大值与地基加速度的最大值之比。因此，当已知地基加速度的最大值为 \ddot{x}_{g0} 时，同样可以用图2-22的曲线来估算支承在地基上的结构总的最大加速度。由于这些曲线可用于此目的，因此又称它们为震动谱。

2.9 在任意动力荷载作用下的反应与杜哈梅尔积分

2.9.1 无阻尼体系的杜哈梅尔积分及数值计算

研究无阻尼单自由度体在图2-24所示任意动力荷载 $p(t)$ 作用下的反应，可把荷载分解为一系列微冲量 $p(\tau)d\tau$ 的连续作用，分别求出体系对每个微冲量的反应，然后根据线性叠加原理，将这些反应累加起来，就得到体系对于任意动力荷载的反应。

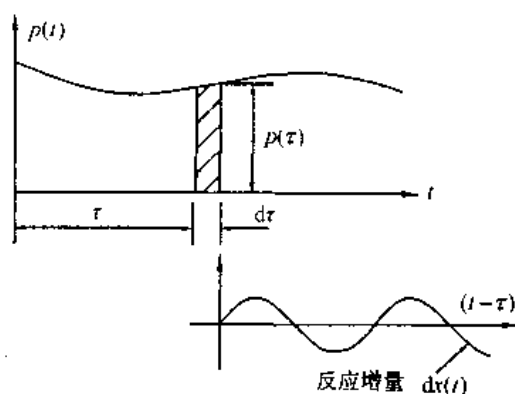


图 2-24 (无阻尼)杜哈梅尔积分的推导

现在我们的不难用上节介绍的方法得出在持续时间短的矩形脉冲作用下的无阻尼体系的运动速度表达式，并将其改写为如下形式

$$dx(t) = \frac{p_0}{k} \omega \sin \omega t dt = \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t dt$$

上式给出了在 $t=0$ 时刻，体系在矩形冲量 $p_0 dt$ 作用下所引起的位移反应增量。如果作用的冲量为 $p(\tau)d\tau$ ，则由此冲量引起的位移反应增量为

$$dx(t) = \frac{p(\tau) \sin \omega t d\tau}{m\omega} \quad (2-97)$$

注意到冲量与质量的比等于速度的改变 $d\dot{x} = \frac{p(\tau)}{m} d\tau$ ，与(2-28)式相比较可知，由于微冲量 $p(\tau)d\tau$ 的作用，引起的位移反应的增量等于初始条件为 $x_0 = x(0) = 0$ ， $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = d\dot{x}$ 的自由振动。

如果微冲量不是作用在 $t=0$ 时刻，而是作用在 $t=\tau$ 时刻，则需经把图2-24的坐标原点向右移 τ ，因此(2-97)式变为

$$dx(t) = \frac{p(\tau)}{m\omega} \sin\omega(t-\tau)d\tau \quad (2-98)$$

因为在 $t < \tau$ 时, 微冲量 $p(\tau)d\tau$ 没有作用于体系, 因此上式只有当 $t > \tau$ 时才有意义。

(2-98)式只是系统对一个微冲量的反应。当动力荷载 $p(\tau)$ 从 $\tau=0$ 到 $\tau=t$ 时刻连续作用时, 体系的反应等于一系列微冲量反应相叠加, 即

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega(t-\tau)d\tau \quad (2-99)$$

这个方程称为无阻尼体系的杜哈梅尔积分, 它可用来计算无阻尼单自由度体系在任意形式的动力荷载作用下的位移反应。但在荷载变化很不规则或荷载由试验数据给出, 而写不出解析表达式时, 必须用数值积分来进行计算。

(2-99)式是在体系的初始条件为零的情况下导出的。如果初始条件不为零, 还必须附加(2-38)式的自由振动反应。在一般情况下, 体系的反应为

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin\omega t + x_0 \cos\omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega(t-\tau)d\tau \quad (2-100)$$

下面讨论如何用数值方法来计算(2-99)式所表达的反应。利用三角恒等式 $\sin(\omega t - \omega\tau) = \sin\omega t \cos\omega\tau - \cos\omega t \sin\omega\tau$, 可把该式变为

$$x(t) = \frac{\sin\omega t}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos\omega\tau d\tau - \frac{\cos\omega t}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega\tau d\tau$$

令

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos\omega\tau d\tau \\ \bar{B}(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2-101)$$

则无阻尼体系在任意荷载作用下的位移反应可表示为

$$x(t) = \bar{A}(t) \sin\omega t - \bar{B}(t) \cos\omega t \quad (2-102)$$

式(2-102)的求解关键是用数值积分来计算系数 $\bar{A}(t)$ 和 $\bar{B}(t)$ 。

以 $\bar{A}(t)$ 为例, 令 $y(\tau) = p(\tau) \cos\omega\tau$ 。当用辛普森法来进行数值积分时, 积分值近似地用 $\frac{\Delta\tau \bar{s}_n}{3}$ 来表示, 则

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t y(\tau) d\tau \approx \frac{\Delta\tau}{3m\omega} \bar{s}_n \quad (2-103)$$

为了计算上述积分, 可将积分区间 $[0, t]$ 分为 n 个等分(如图2-25所示) $t = n\Delta\tau$ 积分值近似地等于曲线 $y(\tau)$ 所围曲边梯形的面积。为了计算各个小区间的面积, 可在每个小区间内取不同数目的样点。如果

样点数为1, 则对应的积分法称为矩形法; 如果样点数为2, 则对应的积分法则是梯形法。最常用的是辛普森法, 该法要求 n 为偶数, 每个小区间的长度为 $2\Delta\tau$, 第一个小区间的面积为

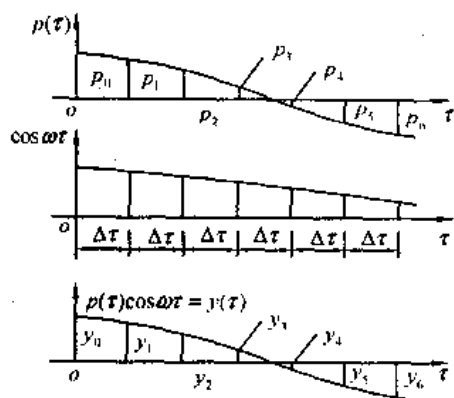


图 2-25 杜哈梅尔积分数值求和法的计算

$$\int_0^{2\Delta\tau} y(\tau) d\tau \approx \frac{\Delta\tau}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{\Delta\tau \bar{s}_2}{3}$$

将每个小区域的微面积相加, 得总面积为

$$\int_0^t y(\tau) d\tau \approx \frac{1}{3} \Delta\tau (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) = \frac{\Delta\tau \bar{s}_n}{3} \quad (2-104)$$

一般说来, 需要求的不是某个特定时刻的反应, 而是一系列相继时刻 $t_1 = 2\Delta\tau$, $t_2 = 4\Delta\tau \dots$ 的反应。为了得到全部反应过程, 将求和写为增量形式, 假定已算得 \bar{s}_{n-2} 则

$$\begin{aligned} \bar{s}_n &= \bar{s}_{n-2} + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) = \\ &= \bar{s}_{n-2} + [p(t - 2\Delta\tau)\cos\omega(t - 2\Delta\tau) + \\ &+ 4p(t - \Delta\tau)\cos\omega(t - \Delta\tau) + p(t)\cos\omega t] \end{aligned} \quad (2-105)$$

同样

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau)\sin\omega\tau d\tau = \frac{1}{m\omega} \int_0^t y'(\tau) d\tau = \frac{1}{m\omega} \frac{\Delta\tau}{3} \bar{s}'_n \quad (2-106)$$

式中, \bar{s}'_n 的计算与 \bar{s}_n 的相类似, 只需将(2-105)式中的余弦函数换为正弦函数即可。

将(2-103)式和(2-106)式代入(2-102)式, 则可导得无阻尼体系反应的数学表达式:

$$x(t) = \frac{\Delta\tau}{3m\omega} [\bar{s}_n \sin\omega t - \bar{s}'_n \cos\omega t] \quad (2-107)$$

数值积分方法的精度取决于时间间隔

$\Delta\tau$ 的长短。根据一般经验, 当 $\frac{\Delta\tau}{T} \leq 0.1$ 时, 能得到满意的结果。

例2-6 用杜哈梅尔积分的数值方法, 计算图2-26所示的水塔在三角形冲击波荷载作用下的位移反应和弹性力(尽管图示简单荷载的反应, 可以由直接积分算出, 但为了说明数值积分的计算步骤, 这里仍用数值方法进行计算)。

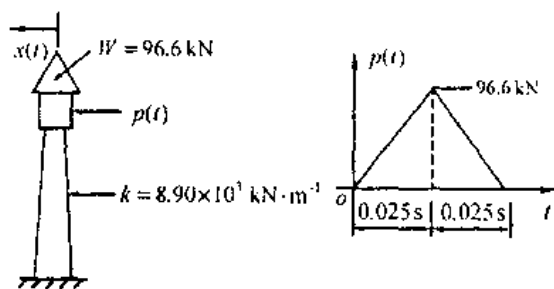


图 2-26 承受冲击波荷载的水塔

【解】体系的振动频率和周期为

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{8.90 \times 10^3 \times 9.81}{96.6}} = 30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \approx 0.209 \text{ s} \end{aligned}$$

取时间增量 $\Delta\tau = 0.005 \text{ s}$, 角增量则为 $\omega\Delta\tau = 0.15 \text{ rad}$ 。显然, $\frac{\Delta\tau}{T} \ll 0.1$, 可望得到足够精度的结果。方程(2-107)方括号前的系数为

$$\bar{G} = \frac{\Delta\tau}{3m\omega} = \frac{0.005 \times 9.81}{96.6 \times 30 \times 3} = 5.641 \times 10^{-6}$$

当 $t = 2\Delta\tau$ 时, 由(2-105)式

$$\begin{aligned} \bar{s}_2 &= \bar{s}_0 + [p(0)\cos 0 + 4p(\Delta\tau)\cos\omega\Delta\tau + p(2\Delta\tau)\cos 2\omega\Delta\tau] = \\ &= 0 + (0 + 4 \times 19.32 \times 0.989 + 38.64 \times 0.955) = 113.3 \end{aligned}$$

以正弦函数代替(2-105)式中的余弦函数, 可算得

$$\begin{aligned}\bar{s}_2' &= \bar{s}_0' + [p(0)\sin 0 + 4p(\Delta\tau)\sin\omega\Delta\tau + p(2\Delta\tau)\sin 2\omega\Delta\tau] = \\ &0 + (0 + 4 \times 19.32 \times 0.150 + 38.64 \times 0.295) = 23.0\end{aligned}$$

由(2-107)式, 位移反应为

$$\begin{aligned}x(2\Delta\tau) &= \bar{G}[\bar{s}_2\sin 2\omega\Delta\tau - \bar{s}_2'\cos 2\omega\Delta\tau] = \\ &5.641 \times 10^{-6}(113.3 \times 0.295 - 23.0 \times 0.995) = 6.46 \times 10^{-5} \text{ m}\end{aligned}$$

相应的弹性力为

$$f_s(2\Delta\tau) = kx(2\Delta\tau) = 0.575 \text{ kN}$$

再计算 $t = 4\Delta\tau$ 时刻的位移和弹性力

$$\begin{aligned}\bar{s}_4 &= \bar{s}_2 + [p(2\Delta\tau)\cos 2\omega\Delta\tau + 4p(3\Delta\tau)\cos 3\omega\Delta\tau + p(4\Delta\tau)\cos 4\omega\Delta\tau] = \\ &113.3 + (38.64 \times 0.955 + 4 \times 57.96 \times 0.901 + 77.28 \times 0.826) = 422.4 \\ \bar{s}_4' &= \bar{s}_2' + [p(2\Delta\tau)\sin 2\omega\Delta\tau + 4p(3\Delta\tau)\sin 3\omega\Delta\tau + p(4\Delta\tau)\sin 4\omega\Delta\tau] = \\ &23.0 + (38.64 \times 0.295 + 4 \times 57.96 \times 0.435 + 77.28 \times 0.564) = 178.8 \\ x(4\Delta\tau) &= \bar{G}[\bar{s}_4\sin 4\omega\Delta\tau - \bar{s}_4'\cos 4\omega\Delta\tau] = 5.1 \times 10^{-4} \text{ m} \\ f_s(4\Delta\tau) &= kx(4\Delta\tau) = 4.54 \text{ kN}\end{aligned}$$

如此算下去, 可得到冲击荷载作用期间各时刻的位移反应和弹性力见表2-4。

表2-4 水塔受冲击荷载作用期间各时刻的位移反应和弹性力

$t(\text{s})$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
$x(\text{mm})$	0.065	0.51	1.67	3.47	5.36
$f_s(\text{kN})$	0.575	4.54	14.9	30.9	47.7

冲击荷载结束后, 体系按最终时刻 $t = 10\Delta\tau$ 算得的 $\bar{A}(10\Delta\tau)$ 和 $\bar{B}(10\Delta\tau)$ 的值作自由振动, 见方程(2-102), 其反应由下式给出

$$x(t) = \bar{A}(10\Delta\tau)\sin\omega t - \bar{B}(10\Delta\tau)\cos\omega t$$

运动的幅值为

$$x_{\max} = \sqrt{[\bar{A}(10\Delta\tau)]^2 + [\bar{B}(10\Delta\tau)]^2}$$

2.9.2 有阻尼体系的杜哈梅尔积分及计算

有阻尼体系在任意动力荷载作用下反应的杜哈梅尔积分表达式的推导过程和无阻尼体系的完全相同。但在阻尼体系中, 微冲量 $p(\tau)d\tau$ 所引起的自由振动反应按指数规律衰减。利用(2-42)式所表达的有阻尼体系的自由振动反应, 取体系的初始条件为 $x_0 = 0$,

$\dot{x}_0 = \frac{p(\tau)d\tau}{m}$, 并将坐标原点右移 τ , 就得到由微冲量 $p(\tau)d\tau$ 所引起的位移反应增量

$$dx(t) = \frac{e^{-\xi\omega(t-\tau)}}{m\omega_D} [p(\tau)\sin\omega_D(t-\tau)]d\tau, \quad t > \tau \quad (2-108)$$

将各个反应微分增量累加起来, 便得到与(2-99)式相对应的杜哈梅尔积分表达式

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau \quad (2-109)$$

为了进行数值计算, 把上式变为与(2-102)式的对应形式

$$x(t) = A(t)\sin\omega_D t - B(t)\cos\omega_D t \quad (2-110)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t \frac{p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \cos\omega_D \tau}{e^{\xi\omega\tau}} d\tau \\ B(t) &= \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t \frac{p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \sin\omega_D \tau}{e^{\xi\omega\tau}} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2-111)$$

这些积分可用前述增量求和的方法进行计算, 只是运算中要考虑指数衰减。与无阻尼的情况相类似, 这两个积分可表述为(2-103)和(2-106)式的对应形式

$$\left. \begin{aligned} A(t) &\approx \frac{\Delta\tau}{3m\omega_D} s_n \\ B(t) &\approx \frac{\Delta\tau}{3m\omega_D} s'_n \end{aligned} \right\} \quad (2-112)$$

式中, s_n 和 s'_n 表示相应被积函数在样点的函数值的加权和。假定已算得 $t = (n-2)\Delta\tau$ 时刻的值 s_{n-2} , 则在 $t = n\Delta\tau$ 时刻

$$s_n = s_{n-2} + p(t-2\Delta\tau)\cos\omega_D(t-2\Delta\tau)\exp(-2\xi\omega\Delta\tau) + 4p(t-\Delta\tau)\cos\omega_D(t-\Delta\tau)\exp(-\xi\omega\Delta\tau) + p(t)\cos\omega_D t \quad (2-113)$$

类似地, 只需用正弦函数代替上式的余弦函数, 便可得到计算 s'_n 的递推公式。

将(2-112)式代入(2-110)式, 便可得到用数值积分方法计算有阻尼体系位移反应的公式

$$x(t) = \frac{\Delta\tau}{3m\omega_D} (s_n \sin\omega_D t - s'_n \cos\omega_D t) \quad (2-114)$$

计算过程总结如下:

- ① 根据体系的物理特性: 重量 W 、刚度 k 和阻尼比 ξ , 计算无阻尼频率 ω 和阻尼频率 ω_D 以及固有周期 T ;
- ② 确定时间增量 $\Delta\tau$, 要求 $\frac{\Delta\tau}{T} \leq 0.1$;
- ③ 计算(2-114)式圆括号前的系数 $G = \frac{\Delta\tau}{3m\omega_D}$ 以及(2-113)式中多次用到的系数 $e^{-2\xi\omega\Delta\tau}$ 和 $4e^{-\xi\omega\Delta\tau}$;
- ④ 对于 $t = 2\Delta\tau, 4\Delta\tau$ 等依次计算:
 - s_n — 用(2-113)式;
 - s'_n — 将(2-113)式中的余弦函数变为正弦函数, 进行计算;
 - $x(t)$ — 用(2-114)式;
 - $f_s(t)$ — $f_s(t) = kx(t)$ 。

习题

2-1 试确定图T2-1所示体系的广义物理特性 M^* , C^* , K^* 和广义荷载 P^* , 这些特性都根据位移坐标 $z(t)$ 定义。计算结果用所给物理特性及尺寸来表达。

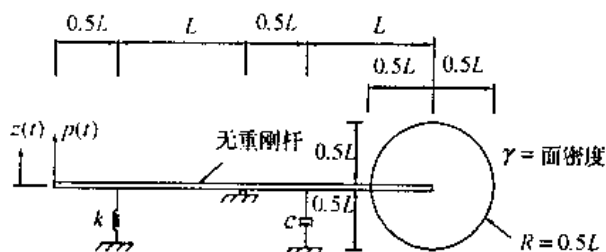


图 T2-1

2-2 按习题2-1的要求计算图T2-2所示的结构。

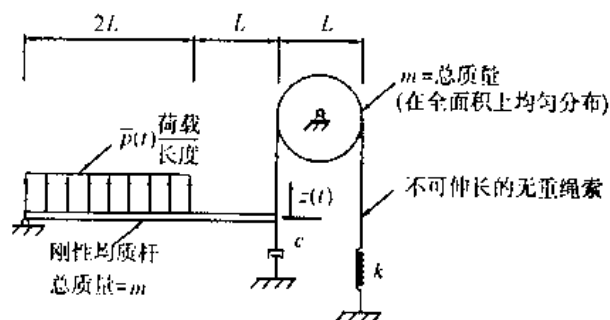


图 T2-2

2-3 按习题2-1的要求计算图T2-3所示的结构。(提示: 因为两个弹簧完全控制了两个刚性杆的相对运动, 所以这个体系仅有一个动力自由度)

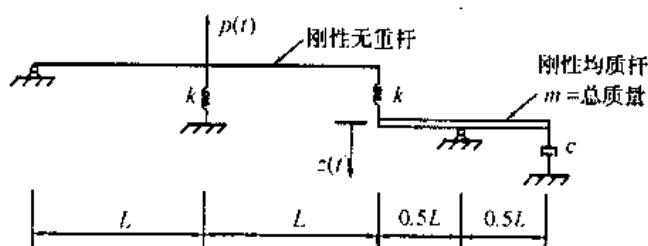


图 T2-3

2-4 如图T2-4所示的柱, 由于规定它的位移形状函数为

$$\psi(x) = \frac{y(x,t)}{z(t)} = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2L}\right)$$

故可作为单自由度体系处理。用 \bar{m} 表示每单位长度的均布质量, 用 EI 表示不变的刚度, 用 $\bar{p}(t)$ 表示单位长度的均布荷载, 试计算广义物理特性 M^* , K^* 和广义荷载 P^* 。

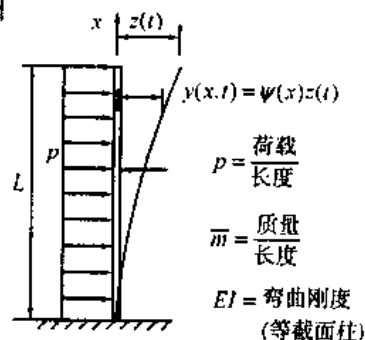


图 T2-4

2-5 ① 如果图T2-4的柱子顶端作用有向下的轴向力 N ，试用同样的形状函数 $\psi(x)$ 计算体系的广义联合刚度 \bar{K} ；② 如果轴向力 N 沿柱子高度线性变化，即 $N(x) = N\left(1 - \frac{x}{L}\right)$ 重算①题。

2-6 如图T2-6 (a)所示，已知等截面悬臂梁在自由端集中荷载 p 作用下的挠曲方程为

$$y(x) = \frac{pL^3}{3EI} \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}$$

① 假定梁单位长度上的质量 $\bar{m} = 0$ ，自由端有集中质量 m ，用影响系数法写出体系的运动方程；

② 若 $\bar{m} \neq 0$ ，而自由端的集中质量 $m = 0$ ，计算体系的广义质量。

2-7 假定在例2-2中，建筑物横梁的重量为 900 kN，用千斤顶迫使横梁偏离平衡位置的位移为 $x_0 = 3$ cm，然后突然释放，使结构产生自由振动。测得结构往返摆动一周的时间为 0.64 s，一周后的最大正位移 $x_1 = 2.2$ cm。试求：

① 横向弹簧刚度 k ；

② 阻尼比 ξ ；

③ 阻尼系数。

2-8 假定图 T2-8 所示结构的质量 $m = 350$ kg，刚度 $k = 70$ kN·m⁻¹。如果体系发生自由振动，其初始条件为 $x(0) = 2$ cm， $\dot{x}(0) = 14$ cm·s⁻¹，试求 $t = 1.0$ s 时的位移及速度。假定：

① $c = 0$ (无阻尼体系)；

② $c = 0.5$ kN·s·m⁻¹ (阻尼体系)。

2-9 假定图T2-8所示体系的质量 $m = 10^3$ kg，刚度 $k = 400$ kN·m⁻¹，阻尼 $c = 0$ ，初始位移 $x(0) = 4.5$ cm，当 $t = 1.2$ s 时位移仍然为 4.5 cm，试求：

① $t = 2.4$ s 时的位移；

② 自由振动的振幅。

2-10 假定图T2-6(a) 所示悬臂梁单位长度上的质量为 \bar{m} ，自由端支承物的质量 $m = 0$ ，试计算梁的自由振动频率，并与准确解 $\omega = \frac{3.52}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$ 相比较，计算误差为百分之几？采用下述挠曲线作为基本振型：

① 在自由端作用有集中荷载 p 的挠曲线

$$y_d(x) = \frac{pL^3}{3EI} \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}$$

② 在自重 $\bar{m}g$ 作用下的挠曲线

$$y_d(x) = \frac{\bar{m}gL^4}{24EI} \frac{6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4}{L^4}$$

2-11 计算图T2-11所示均匀等截面简支梁的振动周期。假定 $m_1 = 3\bar{m}L$ ，采用跨中集中荷载 p 所引起的挠曲

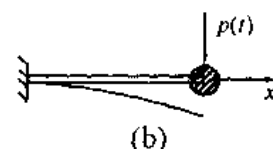
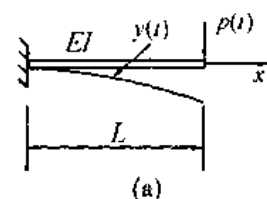


图 T2-6

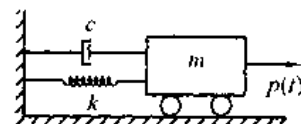


图 T2-8

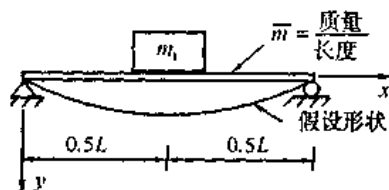


图 T2-11

线作为基本振型

$$y_d(x) = \frac{px}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$$

2-12 假定图T2-8所示的基本体系有如下的动力特性: $m = 400 \text{ kg}$, $k = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ 。如果体系从静止开始承受共振简谐荷载 ($\bar{\omega} = \omega$), 试确定 $\bar{\omega}t = 8\pi$ 时的反应比 $R(t)$ 的值。假定:

- ① $c = 0$ [用方程(2-80)];
- ② $c = 100 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ [用方程(2-79)];
- ③ $c = 400 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ [用方程(2-79)]。

2-13 一位移计固有频率为 1 Hz , 无阻尼, 用来测量频率为 4 Hz 的地基简谐振动。若仪器质量的位移幅值为 1.3 mm , 求地基位移的幅值为多少?

2-14 一个支架重 4 kN , 把它安置在实验室地板上。而地板正以 20 Hz 的频率作竖向运动, 振幅为 0.08 cm 。由于支架上安装有精密仪器, 需把支架的振幅减小到 0.01 cm , 试确定所需隔振体系的弹簧刚度。

2-15 一个分筛机重 30 kN , 当满载运行时, 将在支座上产生 12 Hz , 3 kN 的谐振力, 要把这个谐振力作用于支座上的力的幅值减小到 1.5 kN , 试确定所需隔振装置的弹簧刚度以及 x_{st} 。

2-16 试将图T2-16所示的周期荷载展开成傅里叶级数。

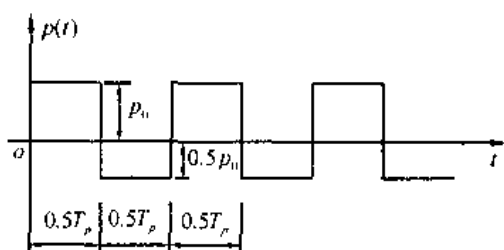


图 T2-16

2-17 假定某结构阻尼比为 0.1 , 重算例2-3。

2-18 假定图T2-8所示基本体系的重量 $W = mg = 3 \text{ kN}$, 弹簧刚度 $k = 195 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ 。如果体系承受图2-21(a)所示的正弦半波脉冲, 荷载幅值 $p_0 = 2.5 \text{ kN}$, 持续时间 $t_1 = 0.15 \text{ s}$, 试确定:

- ① 出现最大反应的时间;
- ② 由该荷载引起的最大弹簧力, 并利用从查图2-22获得的结果来校核前述计算值。

2-19 从0线性增大到峰值的三角形脉冲具有如下特性

$$p(t) = p_0 \frac{t}{t_1}, \quad 0 < t < t_1$$

- ① 假定体系的初始条件为0, 试推导在此荷载作用下单自由度体系的反应表达式;
- ② 如果 $t_1 = \frac{3\pi}{\omega}$, 试确定由此荷载引起的最大反应。

2-20 假定图T2-8所示基本体系的物理特性为 $m = 4 \times 10^3 \text{ kg}$, $k = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ 。承受图2-21(c)所示三角形脉冲荷载, 其荷载幅值 $p_0 = 15 \text{ kN}$, 持续时间 $t_1 = 0.42 \text{ s}$ 。试利用图2-22

的反应谱确定最大弹性力。

2-21 假定图T2-21(a)所示单自由度体系的初始条件为0，试求：

- ① 在图T2-21(b)所示冲击荷载作用下的反应表达式；
- ② 在图T2-21(c)所示冲击荷载作用下，在 $0 \leq t \leq t_1$ 和 $t_1 \leq t \leq t_1 + t_2$ 两个阶段的反应表达式。

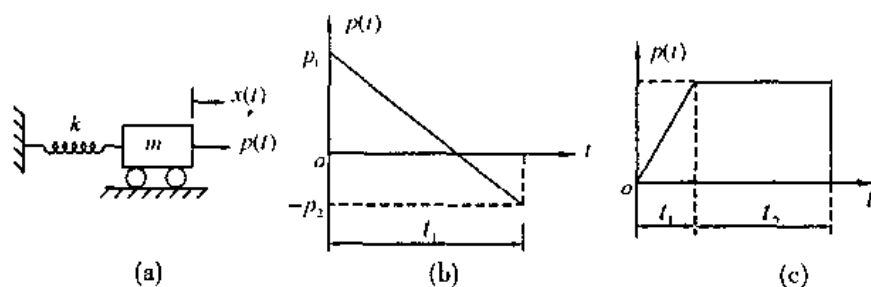


图 T2-21

2-22 假定结构阻尼比 $\xi = 5\%$ ，试用辛普森积分重新计算例2-5。

2-23 图T2-23(a)所示单自由度刚架，承受图T2-23(b)所示冲击波荷载作用。取 $\Delta\tau = 0.12\text{ s}$ ，用辛普森法计算荷载作用期间的位移反应和弹性力。

- ① 假定 $c = 0$ ；
- ② 假定 $c = 400\text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

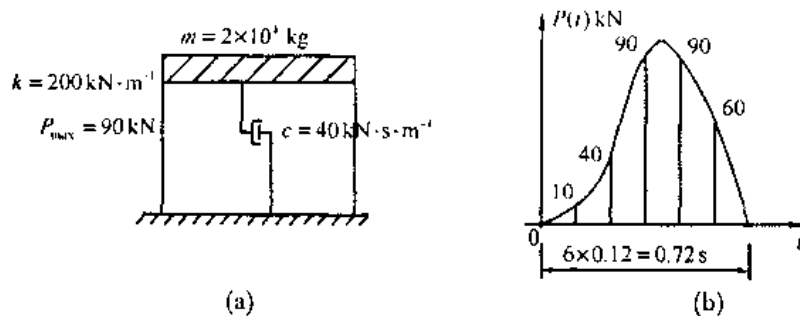


图 T2-23

第3章 多自由度体系的振动

第2章介绍了单自由度体系的振动理论,对此只需用一个独立坐标便能描述体系的运动形态。但实际工程结构较为复杂,常常需要多个独立坐标才能描述体系的运动形态,因此需要讨论多自由度体系的振动理论。

一个具有 n 个自由度的体系,它在任一瞬时的运动形态要用 n 个独立坐标来描述。一般说来,体系的运动方程是 n 个互相耦合的二阶常微分方程组成的方程组。

本章主要讨论如何建立具有集中质量离散体系的运动方程;如何用有限元法将分布参数体系简化为离散体系,并建立其运动方程;如何求解体系的运动微分方程和如何计算体系的瞬态反应。

3.1 自由度的选择

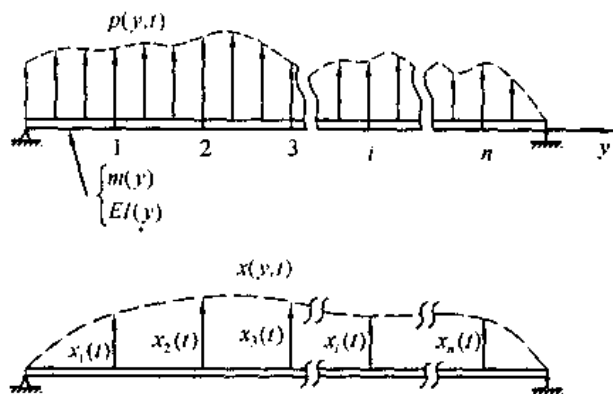


图 3-1 一般梁式结构的离散化

在上一章,我们已系统地讨论了单自由度体系的振动。实际上并非所有的体系用单自由度模型表示都能取得较满意的结果,真正能用单自由度模型表示的结构很少。若用单自由度模型表示(或近似表示)一个结构,包括用广义单自由度体系在内,其最终取得的结果是否令人满意取决于所采用的假定是否较好地反映真实情况,这一点恰是最难以把握的。

一般说来,用一个单自由度模型不足以适当地描述一个结构的动力反应。

通常,反应一般包括振幅和位移形状随时间的变化,这样的行为只能用一个以上的位移坐标来描述,即须用多个自由度表示。

一个结构应用多少动力自由度表示,取决于分析者的判断。一般而言,所选用的动力自由度的数目越大,越能逼近结构的真实行为。

以图3-1所示的简支梁为例,假定该梁的运动由其上的一系列离散点位移 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, \dots , $x_n(t)$ 所确定。原则上,结构上的这些点可任意设置且点数越多越好,但对此梁,往往只需两三个自由度就能取得极好的结果。在图3-1中,梁上的每一节点只取一个位移分量,而将转角和纵向运动分量忽略不计。

3.2 用动力平衡条件建立动力方程

针对体系每个自由度列出动力平衡条件,就能写出图3-1所示结构的运动方程。一般来

说, 在任何一点 i 处, 包含有四种力: 外荷载 $p_i(t)$, 由运动产生的惯性力 f_{Ii} 、阻尼力 f_{Di} 和弹性力 f_{Si} , 这样, 对多自由度体系中的每一个自由度, 动力平衡条件可写成

$$\begin{aligned} f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= p_1(t) \\ f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} &= p_2(t) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3-1a)$$

或用向量形式, 可写成

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (3-1b)$$

每一个分力均可用一系列影响系数表示。

以节点 1 为例, 在节点 1 上产生的弹性力分量可写成

$$f_{S1} = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \cdots + k_{1N}x_N$$

对一般节点 i , 则有

$$f_{Si} = k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + \cdots + k_{iN}x_N$$

用矩阵形式, 全部弹性力可写成

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{Si} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (a)$$

由此可定义刚度影响系数

k_{ij} = 由 j 坐标单位位移所引起的对应于 i 坐标的力。

若假定阻尼力与速度有关(粘滞阻尼假定), 则节点 i 上的阻尼力为

$$\begin{aligned} f_{Di} &= c_{i1}\dot{x}_1 + c_{i2}\dot{x}_2 + \cdots + c_{iN}\dot{x}_N \\ \begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{Di} \\ \vdots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (b)$$

相应可定义阻尼影响系数

c_{ij} = 由 j 坐标单位速度所引起的对应于 i 坐标的力。

惯性力也可用一组影响系数表示, 这组系数叫做质量影响系数。它们反映自由度的加速度与其产生的惯性力之间的关系, 类似于公式(a)、公式(b), 惯性力可表示为

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{Ii} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2i} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ii} & \cdots & m_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (c)$$

其中, m_{ij} = 由坐标 j 的单位加速度引起的对应于 i 坐标的力。

把式(a)、(b)、(c)代入式(3-1a)或(3-1b), 考虑全部动力自由度, 可给出结构的动力平

衡方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (3-2)$$

其中矩阵 m , c , k 展开形式的各元素由式(c)、(b)、(a)表示。

3.3 用影响系数法建立运动方程

由于结构阻尼系数通常是用实验方法来确定的, 为了简单, 这里不考虑阻尼。现在以图3-2(a)所示的三自由度体系为例, 说明如何用影响系数法来确定质量弹簧体系的质量矩阵和刚度矩阵。

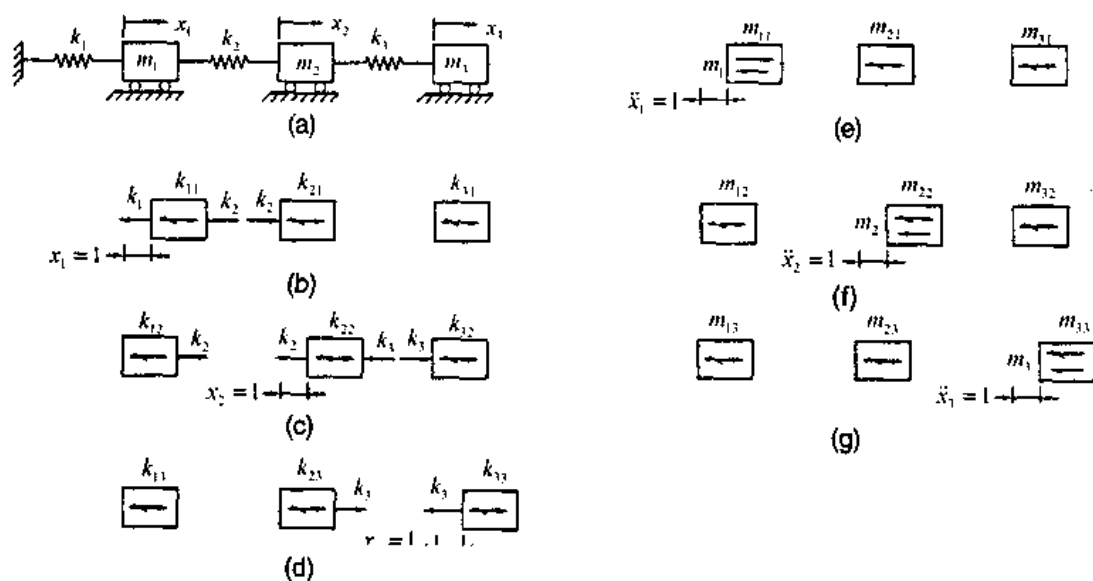


图 3-2 计算影响系数的示例

图示体系有三个质量, 由于约束, 这三个质量都只能在水平方向运动, 因此这是一个三自由度体系。取三个质量相对于各自平衡位置的位移为独立坐标, 并将其表示为

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$$

先只考虑静态, 令 $x = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ 。此时弹簧 k_1 的变形为 $\Delta_1 = x_1 - 0 = 1$, 弹簧力 $f_{s1} = k_1 \Delta_1 = k_1$, 弹簧受拉; 弹簧 k_2 的变形为 $\Delta_2 = x_2 - x_1 = -1$, 弹簧力 $f_{s2} = k_2 \Delta_2 = -k_2$, 弹簧受压; 弹簧 k_3 没有变形, 弹簧力 $f_{s3} = 0$ 。诸弹簧作用于各质量的力, 如图3-2(b)所示。为了维持这种特殊的位移状态, 需要在各个坐标方向施加外力来与弹簧作用于各质量的力保持平衡, 所施加的力(图中箭杆上画有斜线的力)应是

$$k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{21} = -k_2, \quad k_{31} = 0$$

同样地, 令 $x = [0 \quad 1 \quad 0]^T$, 得到

$$k_{12} = -k_2, \quad k_{22} = k_2 + k_3, \quad k_{32} = -k_3$$

最后令 $x = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, 得到

$$k_{13} = 0, \quad k_{23} = -k_3, \quad k_{33} = k_3$$

因此刚度矩阵为

$$k = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

现在只考虑动态, 令加速度向量为 $\ddot{x} = [1 \ 0 \ 0]^T$, 见图3-2(e)(为了直观, 加速度的值以位移的形式画出来)。由受力分析得知, 为维持这种加速度状态, 在各个坐标方向施加的力(图中箭杆上画有斜线的力)应当是

$$m_{11} = m_1, \quad m_{12} = 0, \quad m_{13} = 0$$

令 $\ddot{x} = [0 \ 1 \ 0]^T$, 得到

$$m_{12} = 0, \quad m_{22} = m_2, \quad m_{32} = 0$$

最后, 令 $\ddot{x} = [0 \ 0 \ 1]^T$, 得到

$$m_{13} = 0, \quad m_{23} = 0, \quad m_{33} = m_3$$

所以质量矩阵为

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

体系各个质量上没有外力作用, 所以运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

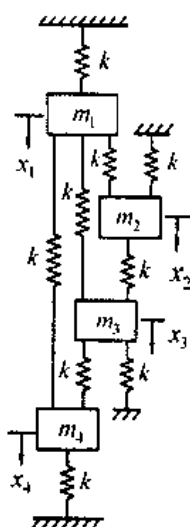


图 3-3 复杂质量弹簧体系

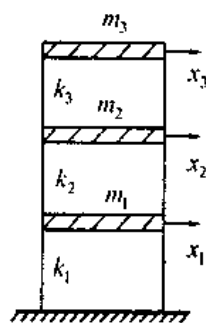


图 3-4 三层建筑物的简化模型

对于质量弹簧体系来说, 当每个质量仅考虑一个平移自由度时, 其质量矩阵总是(3-4)式这样的对角形式, 对角元素 m_{ii} 正好等于第 i 个质块(或质点)的质量 m_i 。不论体系多么复杂, 其刚度矩阵的组成规则是: 对角元素 k_{ii} 为联结在质量 m_i 上的所有弹簧刚度的和; 非对角元素 k_{ij} 都是负值, 其大小等于联结质量 m_i 和 m_j 的弹簧刚度。

有了这个规则, 就不难写出图3-3所示复杂质量弹簧体系的质量矩阵和刚度矩阵。若记位移向量为 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, 则

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 4k & -k & -k & -k \\ -k & 3k & -k & 0 \\ -k & -k & 4k & -k \\ -k & 0 & -k & 3k \end{bmatrix}$$

这个结论同样适用于承受剪切变形的质量弹簧体系。例如图3-4所示一个三层建筑物的简化模型。由于楼层的刚度比柱子的刚度大得多，可以把它看作为一个刚性的大梁。大梁上集中了楼层的全部质量和绝大部分柱子的质量（只有底层柱子的部分质量集中于基础），柱子被看作无重杆，这样建筑物就被简化为具有三个集中质量的体系。不计柱子的轴向变形，每个质量仅考虑水平位移一个自由度，体系就简化为三自由度体系。每层两边柱子的水平抗剪刚度之和为 k_i ($i=1,2,3$)，即当该层上下两个质量水平相对位移 $\Delta_i=1$ 时，该层两根柱子剪力之和为 k_i 。对这样的简化模型，其质量和刚度矩阵仍由(3-4)式和(3-3)式算得，但 k_i 为抗剪刚度。

应当指出，在动力问题中，位移向量 x 仅包含可动节点位移分量，不包含约束方向的位移分量（即不包含刚体位移分量），速度向量和加速度向量也同样，这是与静力问题不同的地方。由于这样规定了位移向量，使得动力问题的结构刚度矩阵本身就是满秩可逆的；而不像静力问题那样，在进行支座处理之前， k 是降秩的。

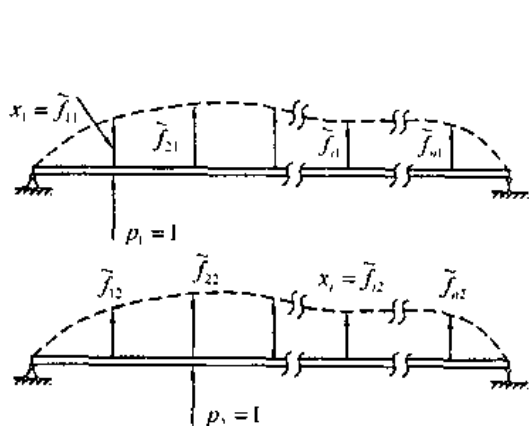


图 3-5 柔度影响系数的定义

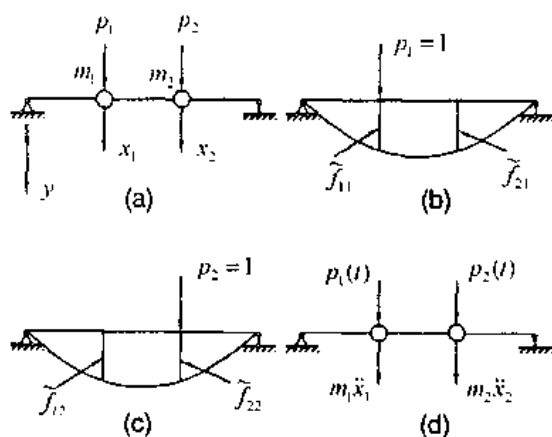


图 3-6 两自由度的简支梁

对于静定结构，有时计算结构刚度矩阵比较费事，而计算它的逆阵——柔度矩阵 \tilde{f} 却比较容易，这里定义柔度影响系数 \tilde{f}_{ij} 为在第 j 个坐标方向上作用单位力引起的第 i 个坐标方向上的位移。其物理意义与刚度影响系数恰好相反。

以图3-5所示简支梁为例，说明柔度影响系数的定义和求法。假定只考虑竖向位移，按定义在坐标 x_j 方向上作用单位力 $p_j=1$ ，然后计算节点 i 的挠度 x_i ，它即是柔度影响系数 \tilde{f}_{ij} 。柔度影响系数可用结构力学中的图乘法算得：依次在每个位移方向施加单位力 $p_j=1$ ($j=1,2,\dots,n$)，然后作出相应的弯矩图 \bar{M}_j ，如果只考虑弯曲变形能，则柔度影响系数为

$$\tilde{f}_{ij} = \int_0^L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx \quad (3-5)$$

式中, EI 为梁的抗弯刚度, L 为梁的长度。梁的柔度影响系数还可以用材料力学中的挠曲线方程算得(见例3-1)。

有了柔度影响系数的概念后, 就可以讨论如何建立体系的位移方程了。为了简单, 下面不计阻尼, 以图3-6所示两自由度简支梁为例, 说明如何得到体系的位移方程。

图示这种无质量弹性梁上具有若干个集中质量的多自由度体系, 它是由质量连续分布的弹性梁简化来的。设 p_1 、 p_2 是不随时间变化的力, 并以静力的方式作用到梁上, 这时梁只产生位移(即挠度), 不产生加速度。取集中质量 m_1 、 m_2 的静力平衡位置为坐标 x_1 、 x_2 的原点。按影响系数的定义, 当 $p_1 = 1$, $p_2 = 0$ 时, 两个质量的位移为 $x_1 = \tilde{f}_{11}$, $x_2 = \tilde{f}_{21}$, 如图3-6(b)所示; 当 $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ 时, 两个质量的位移为 $x_1 = \tilde{f}_{12}$, $x_2 = \tilde{f}_{22}$, 如图3-6(c)所示。对于线弹性体, 当两个质量同时受到大小为 p_1 、 p_2 的外力作用时, 它们的位移可由叠加原理得到

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{f}_{11} p_1 + \tilde{f}_{12} p_2 \\ x_2 &= \tilde{f}_{21} p_1 + \tilde{f}_{22} p_2 \end{aligned}$$

将上面两式写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

或简记为

$$x = \tilde{f} p \quad (b)$$

式中, \tilde{f} 称为结构的柔度矩阵, p 为荷载向量或作用力向量。

当外力是动荷载 $p_1(t)$ 、 $p_2(t)$ 时, 必然使梁产生加速度, 因此集中质量上有惯性力存在, 见图3-6(d)。此时(a)式成为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) - m_1 \ddot{x}_1 \\ p_2(t) - m_2 \ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

将上式改写为如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} \right)$$

或简写为

$$x = \tilde{f} [p(t) - m\ddot{x}] \quad (3-6)$$

这便是两自由度无阻尼体系的位移方程。 n 自由度体系的位移方程也是上面的形式, 但柔度矩阵是 n 阶方阵。位移方程还可以写为下面形式

$$\tilde{f} m \ddot{x} + x = \tilde{f} p(t) \quad (3-7)$$

为了找到柔度矩阵和刚度矩阵的关系, 假定阻尼为零, 将方程(3-2)改写为

$$kx = p(t) - m\ddot{x} \quad (3-8)$$

前面曾经提到, 在动力问题中刚度矩阵 k 是满秩可逆的。将上式两端均前乘 k^{-1} , 得

$$x = k^{-1} [p(t) - m\ddot{x}] \quad (3-9)$$

比较(3-6)和(3-9)两式得出

$$\tilde{f} = k^{-1} \quad (3-10)$$

上式表明结构的柔度矩阵和刚度矩阵互为逆阵。由位移互等定理知 $\tilde{f}_{ij} = \tilde{f}_{ji}$ ，因此

$$\tilde{f}^T = \tilde{f}$$

即柔度矩阵是对称的，从而刚度矩阵也是对称的，即 $k_{ij} = k_{ji}$ 。利用能量原理，还可以证明，对于稳定结构，这两个矩阵都是正定的。

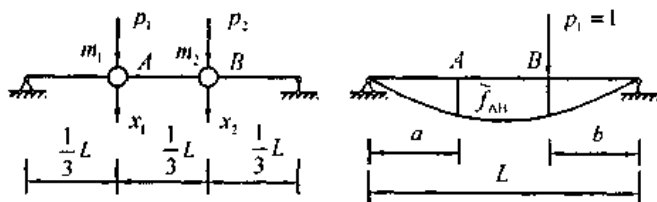


图 3-7 两自由度简支梁算例

例3-1 写出图3-7所示两自由度简支梁作横向振动的位移方程。假定梁的抗弯刚度为 EI ，集中质量和所作用的动荷载如图示。

【解】 由材料力学知，对图3-7所示简支梁，当 B 点作用单位荷载时 A 点的挠度为

$$\tilde{f}_{AB} = \frac{ab}{6EIL}(L^2 - a^2 - b^2)$$

由上式算出下列柔度影响系数

$$\tilde{f}_{11} = \tilde{f}_{22} = \frac{8L^3}{486EI}, \quad \tilde{f}_{21} = \tilde{f}_{12} = \frac{7L^3}{486EI}$$

因此结构的柔度矩阵为

$$\tilde{f} = \frac{L^3}{486EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

由(3-6)式，梁作横向振动的位移方程为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{L^3}{486EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

3.4 结构特性矩阵的计算与动力问题的有限元列式

前一节讨论了具有集中质量离散体系运动方程的建立。在那里，质量已离散到各个节点，杆件被看作无质量的弹簧，这样结构就成为质量弹簧体系，并且只考虑了节点的平移自由度。实际结构不是这种质量弹簧体系，而是分布参数体系，具有无穷多个自由度。本节讨论如何用有限元法把分布参数体系离散为具有有限个自由度的多自由度体系，并建立其运动方程。

考察图3-8所示梁式结构的离散化。为了得到较为精确的挠曲形状，可用第1章介绍的广义位移法和这里将要讨论的有限元法进行离散。两种方法都可以选择多个(例如 n 个)形状函数 $\psi_i(x)$ 和相应的位移幅值 $x_i(t)$ ，然后把位移表达为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) x_i(t) \quad (3-11)$$

这样，当 $x_i(t)$ 取不同值时，梁的位移形状和幅值都随时间变化。应当看到，两种方法在(3-11)式中的含义是有区别的：①在广义位移法中， $\psi_i(x)$ 代表指定的位移模式，它可在整个结构

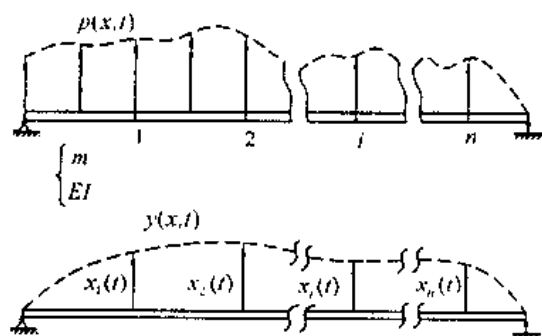


图 3-8 梁式结构的离散化

性相适应,才能形成一条很好的挠曲线。如变截面阶梯梁,应在截面突变处放置一个节点。每个节点可只取横向位移一个自由度(如图3-8示的那样),也可以取纵向位移和转角作为附加自由度。所有节点自由度之和便是结构的总自由度数。一般说来,所取自由度数越多,计算精度越高。但在许多情况下,只需较少的自由度便能获得较好的低频解。位移反应主要取决于低频解的值,这样就可以得到很好的近似结果。

方程(3-2)中的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和荷载向量统称为结构的特性矩阵。这些矩阵确定了,结构的运动方程也就得到了。下面先讨论一般三维动力问题的有限元列式,然后再讨论杆系结构矩阵的计算、线性近似及自由度的缩减。

考虑图3-9所示任意三维物体,建立总体坐标系 XYZ , 任意一点的位移为

$$u = [U \quad V \quad W]^T$$

上式是列向量

$$u = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

的简写形式,以下同。设三维物体上作用有

$$\text{体力} \quad f^B = [f_X^B \quad f_Y^B \quad f_Z^B]^T$$

$$\text{表面力} \quad f^S = [f_X^S \quad f_Y^S \quad f_Z^S]^T$$

在点 i 作用有集中力

$$F^i = [F_X^i \quad F_Y^i \quad F_Z^i]^T$$

任意一点的应变为

$$\varepsilon = [\varepsilon_X \quad \varepsilon_Y \quad \varepsilon_Z \quad \varepsilon_{XY} \quad \varepsilon_{YZ} \quad \varepsilon_{ZY}]^T$$

应力为

上取非零值; $x_i(t)$ 代表指定位移模式的幅值。

②在有限元法中,是将结构分为由节点相连接的若干个单元, $\psi_i(x)$ 为某个小区域的位移模式,仅在这个小区域内取非零值; $x_i(t)$ 为指定的节点位移的幅值。

对于图示简支梁,有限元法把梁分为若干个单元,这些单元可以等长,也可以不等长。单元和单元之间由节点连接,所有节点位移 $x_1(t)$, $x_2(t)$, \dots , $x_n(t)$ 便可确定梁的挠曲形状。因此,节点的分布必须与梁的主要物理特

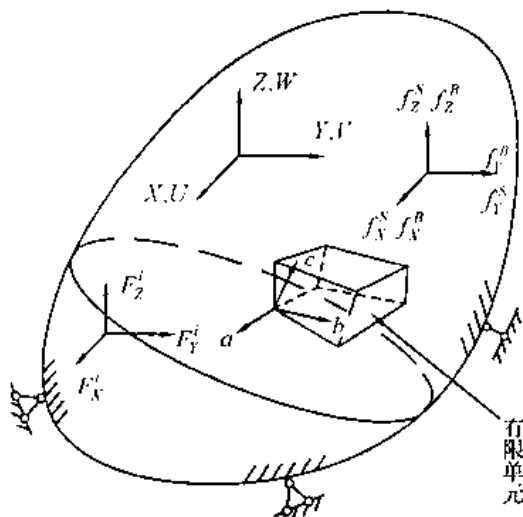


图 3-9 一般三维物体

$$s = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

应力和应变应满足物性关系

$$s = Ee \quad (3-12)$$

这里 E 为弹性常数矩阵, 即

$$E = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

称

式中, E 为弹性模量, μ 为泊松比, 应变位移满足相容条件

$$e = Du \quad (3-13)$$

式中, D 为微分算子, 对于三维问题

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial}{\partial Z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix}^T$$

在变形体满足平衡条件的状态下, 引入一组虚位移 δu , 它在内部产生协调的虚变形 δe 。由虚功原理, 内力虚功等于外力虚功

$$\int_V \delta e^T s dV = \int_V \delta u^T f^B dV + \int_S \delta u^T f^S dS + \sum_i (\delta u^i)^T F^i \quad (3-14)$$

式中, V 为物体的体积, S 为物体的表面积。

按照有限单元法把物体划分为若干个单元, 单元与单元之间由节点相联结, 每个单元的节点都位于其边界上。

在推导(3-14)式时, 所考虑的三维体完全是任意的, 坐标也是任意选定的。因此, 如果用单元 e 的局部坐标系 xyz 来定义各个向量: 位移向量、应变向量、应力向量和各个力向量, 经过同样的推导, 可以建立该单元的虚功表达式。这个表达式在形式上与(3-14)式完全相同, 唯一的区别是各个积分是在单元的局部坐标系下进行的, 且积分区域为单元的体积 V_e 或表面积 S_e 。为了书写简便, 直接将(3-14)式作为单元的虚功表达式来运用, 不再对单元 e 写出这个表达式。

在有限元法中, 单元内部的位移是以节点位移来表述的。假定在局部坐标系下, 选择了 m 个节点位移分量 $U_i (i=1, 2, \dots, m)$ 来表示单元内位移, 这些分量构成位移列向量

$$U = [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_m]^T$$

在动力问题中, 各个分量都是时间 t 的函数, 则单元内位移可以写为

$$u = \psi(x, y, z)U \quad (3-15)$$

式中 $\psi(x, y, z)$ 为 $3 \times m$ 阶形状函数阵，它仅仅是单元局部坐标 xyz 的函数。

将(3-15)式代入(3-13)式，则应变的表达式变为

$$\varepsilon = Du = BU \quad (3-16)$$

式中

$$B = D\psi \quad (3-17)$$

是微分算子 D 作用于形状函数 E 的结果，称为应变——节点位移关系阵，也仅仅是坐标的函数。对于三维问题，它是 $6 \times m$ 阶矩阵。

将(3-12)、(3-15)和(3-16)三式代入虚功方程(3-14)，得

$$\begin{aligned} \delta U^T \int_{V_e} B^T E B dV U = \delta U^T \int_{V_e} \psi^T f^B dV + \\ \delta U^T \int_{S_e} \psi^T f^S dS + \delta U^T F \end{aligned} \quad (3-18)$$

这里假定集中荷载作用处均取为节点，尽管这样做并不一定都是必须的。这样单元的虚位移 δu 可以用节点虚位移 δU 来表示。每一个节点位移方向都作用有集中荷载，这些荷载分量构成 m 维列向量 F ，在无集中力作用处， F 的对应分量为零。

这样，就得到在局部坐标系下，单元刚度矩阵

$$k^e = \int_{V_e} B^T E B dV \quad (3-19)$$

和一致节点荷载列阵

$$p_{eq} = \int_{S_e} \psi^T f^S dS \quad (3-20)$$

这两个矩阵，在计算力学中我们已学过如何计算了。在动力问题中，唯一不同的是表面力是时间 t 的函数

$$f^S = f^S(x, y, z, t)$$

在积分过程中，只要把 t 看作常量，不参与积分就行了。在某些情形中，时间变量可以分离出来，表面力可以表示为

$$f^S = a(x, y, z)\zeta(t)$$

这时(3-20)式就变为

$$p_{eq} = \zeta(t) \int_{S_e} \psi^T a(x, y, z) dS$$

使节点荷载的计算得到简化。

现在来看(3-18)式中的体力项。在动力问题中，应考虑の体力包括达朗贝尔力和阻尼力。用 ρ 表示单位体积中的质量， c 表示阻尼系数，假定阻尼是粘滞性的，则单位体积内分布的体力为

$$f^B = -\rho\ddot{u} - c\dot{u}$$

式中的负号表示达朗贝尔力和阻尼力分别与加速度和速度的方向相反。将(3-15)式对时间 t 微分，代入上式，得

$$f^B = -\rho\psi\ddot{U} - c\psi\dot{U}$$

将这个表达式代入方程(3-18)中的体力项，则有

$$\int_{V_e} \psi^T f^B dV = -\int_{V_e} \rho\psi^T \psi dV \ddot{U} - \int_{V_e} c\psi^T \psi dV \dot{U} \quad (3-21a)$$

这就给出了在局部坐标系下单元质量矩阵和阻尼矩阵的算式

$$m^e = \int_{V_e} \rho \psi^T \psi dV \quad (3-21b)$$

$$c^e = \int_{V_e} c \psi^T \psi dV \quad (3-21c)$$

(3-21)式给出的单元质量矩阵所用的插值函数与计算单元刚度矩阵的一致, 因此把它叫做一致质量矩阵。尽管阻尼矩阵有(3-21c)式给出的算式, 但实际结构的阻尼系数 c 只能根据类似结构的实验来确定, 以此来计算结构阻尼矩阵。

将(3-19)、(3-20)和(3-21)三式代入(3-18)式, 得

$$\delta U^T k^e U = \delta U^T (-m^e \ddot{U} - c^e \dot{U} + p_{eq} + F) \quad (3-22)$$

现把局部坐标系中的单元位移向量 U 变为总体坐标系中的单元位移向量 \bar{U} 。设从局部坐标到总体坐标变换阵为 λ^T , 它由 $m \times m$ 个方向余弦组成, 且本身满足正交条件

$$\lambda^T \lambda = I$$

在两个坐标系下节点位移向量的关系为

$$U = \lambda \bar{U}$$

对各个列向量都进行了同样的变换, 这样(3-22)式就成为

$$\delta \bar{U}^T \bar{k}^e \bar{U} = \delta \bar{U}^T (-\bar{m}^e \ddot{\bar{U}} + \bar{c}^e \dot{\bar{U}} + \bar{p}_{eq} + \bar{F}) \quad (3-23)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}^e &= \lambda^T k^e \lambda \\ \bar{m}^e &= \lambda^T m^e \lambda \\ \bar{c}^e &= \lambda^T c^e \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

分别表示总体坐标系下的单元刚度矩阵和单元质量矩阵。

用 n 维列向量 $x(t)$ 来表示结构位移向量, 它包含全部可动节点位移分量。单元 e 的节点位移向量 \bar{U}^e 和结构位移向量 x 可用 $m \times n$ 阶布尔矩阵 A^e 连系起来

$$\bar{U}^e = A^e x$$

布尔矩阵 A^e 每一行的 n 个元素中, 仅一个元素为1, 其余元素全部为零。例如, 假定 \bar{U}^e 的第一个分量 \bar{U}_1 与 x 的第 j 个分量 x_j 对应, 则布尔矩阵的第一行为

$$[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

↑

第 j 列

只是在推导过程中用布尔矩阵, 在结构刚度矩阵和质量矩阵的集合过程中并不用这个矩阵, 而按单元自由度与结构位移向量的分量的对应关系放置或累加单元阵的对应元素即可。

将单元位移向量、虚位移向量和加速度都用结构位移向量及其对应的物理量来表示, 则(3-23)式变为

$$\delta x^T (A^e)^T \bar{k}^e A^e x = \delta x^T (A^e)^T (-\bar{m}^e A^e \ddot{x} - \bar{c}^e A^e \dot{x} + \bar{p}_{eq} + \bar{F})$$

这仅仅是一个单元的虚功表达式, 将所有单元的虚功表达式累加起来, 就得到全结构的虚功表达式。注意到结构位移向量、虚位移向量和加速度向量与求和过程无关, 因此有

$$\delta x^T k x = \delta x^T (-m \ddot{x} - c \dot{x} + p) \quad (3-25)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} k &= \sum_e (A^e)^T \bar{k}^e A^e \\ m &= \sum_e (A^e)^T \bar{m}^e A^e \\ c &= \sum_e (A^e)^T \bar{c}^e A^e \\ p(t) &= \sum_e (A^e)^T (\bar{p}_{eq} + \bar{F}) \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

分别表示结构的刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵和结构的荷载向量。

因为虚位移 δx 是任意的，例如可以依次使结构在每个位移分量方向上产生单位虚位移，这样(3-25)式中的虚位移向量 δx 就变为单位矩阵 I ，从而导出结构运动方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (3-27)$$

这是动力问题一般有限元列式的主要过程。与静力问题的有限元列式过程比较，有以下异同。

1) 特性矩阵的计算

① 在局部坐标系下，动力问题与静力问题单元刚度矩阵的计算相同，一致节点荷载的计算也相同。对于动力问题来说，只需把时间变量看作常量就行了。但动力问题多了单元质量矩阵的计算，可用(3-21b)式来计算单元的一致质量矩阵。

② 从(3-24)式看，单元刚度矩阵和质量矩阵从局部坐标到整体坐标的变换过程是相同的。

③ 从(3-26)式来看，结构刚度矩阵和结构的一致质量矩阵的集合过程是相同的，因此两者非零元素的位置也是相同的。更进一步讲，两者都是带状的，且带宽相等。但是如果某个节点有集中质量，算出一致质量矩阵 m 后，应在 m 中与该节点的所有平移自由度对应的对角元素上累加这个集中质量，这并不会影响质量矩阵原有的带状性。

2) 支座处理

① 静力问题的基本方程是

$$kx = p$$

在位移向量 x 和荷载向量 p 中包含了所有自由度(可动的和约束的)方向上的分量。在进行支座处理之前，刚度矩阵 k 是降秩不可逆的，通过主元赋大值或充零法进行支座处理后，它才是对称正定的，方程才能解。

② 在动力问题的运动方程(3-27)中，位移向量 $x(t)$ 和荷载向量 $p(t)$ 本身不包含约束自由度方向的分量，因此在结构刚度矩阵和一致质量矩阵的集合过程中就不累加与约束自由度对应的项，所以这两个矩阵本身就是对称正定的，集合完成后不需要再作支座处理。

尽管前面讨论的动力问题的有限元列式是针对一般三维问题来建立的，但下面所举的例题只涉及到平面一维匀质等截面杆元这种简单情形。假定杆元的长度为 L ，弹性模量为 E ，横截面积为 A ，质量密度为 ρ ，则单位长度上的质量可表示为 $\bar{m} = A\rho$ 。

例3-2 图3-10所示平面桁架单元仅有轴向位移和变形。试写出单元特性矩阵。

[解] 用节点位移的线性插值式来表示单元内位移,有

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}(x) \boldsymbol{U}$$

应变

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{U}$$

弹性常数矩阵 \boldsymbol{E} 为 1×1 阶矩阵。利用(3-19)式, 单元刚度矩阵

$$\boldsymbol{k}^e = \int_{V_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{E} \boldsymbol{B} dV = \int_0^L \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{E} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{L} A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

利用(3-21b)式, 单元质量矩阵

$$\boldsymbol{m}^e = \int_{V_e} \rho \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} dV = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \left(\frac{x}{L}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{\bar{m}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

例3-3 图3-11所示平面梁单元的主要变形是弯曲变形, 即由弯曲引起的轴向变形, 忽略剪变形的影响。试写出单元特性矩阵。

[解] 利用平面假定, 单元

内任意一点的轴向位移为

$$u(x, y) = -y \frac{dv}{dx}$$

式中 $v = v(x)$ 表示单元轴线的横向位移。从图中看出, 当 v 为正, $\frac{dv}{dx} > 0$ 时, 在 $y > 0$ 区域 u 为

负, 故 $u = -y \frac{dv}{dx}$ 。取图3-11(a)所示的4个节点位移来表示横向位移 $v(x)$ 。利用埃尔米特 (Hermit) 插值, 有

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & \left(\frac{x}{L}\right)^2\left(3 - \frac{2x}{L}\right) & \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}(x) \boldsymbol{U} \quad (3-28)$$

因此, 轴向应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} = -y \boldsymbol{\Psi}''(x) \boldsymbol{U} = -\frac{y}{L^2} \begin{bmatrix} 12x - 6 & 6x - 4L & 6 - \frac{12x}{L} & 6x - 2L \end{bmatrix} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{U}$$

将矩阵 \boldsymbol{B} 代入(3-19)式, 单元刚度矩阵成为

$$\boldsymbol{k}^e = \int_{V_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{E} \boldsymbol{B} dV = \frac{E}{L^3} \int_0^L \left(\int_A y^2 dA \right) \bar{\boldsymbol{B}}^T \bar{\boldsymbol{B}} dx$$

因为上式中圆括号内的积分为截面惯性矩

$$I = \int_A y^2 dA$$

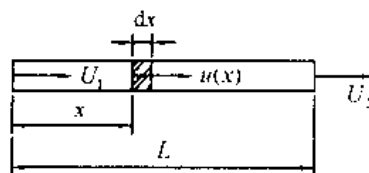
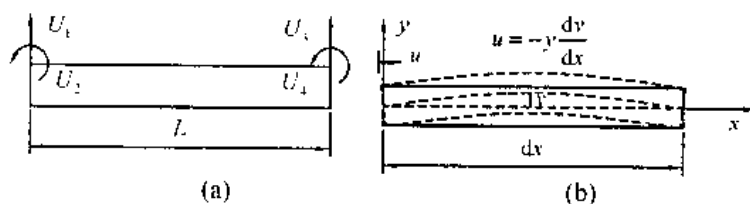


图 3-10 平面行架单元



(a) 梁单元 (b) 变形微段
图 3-11 平面弯曲梁单元

所以

$$k^e = \frac{EI}{L^4} \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{B}} dx = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

单元质量矩阵

$$\begin{aligned} m^e &= \int_{V_e} \rho \psi^T \psi dV = \rho A \int_0^L \psi^T \psi dx = \\ &= \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-30)$$

(3-12)式中的应力向量和应变向量可以用广义的应力向量和应变向量代替。此时，相应的弹性常数矩阵也用广义的，这样计算就更为简单。例如对于前例的平面梁单元，以轴线的曲率 $\eta(x)$ 作为广义应变，它与位移 v 的关系为

$$\eta(x) = v''(x)$$

利用(3-28)式，曲率可以表示为

$$\eta(x) = v''(x) = \psi'' U$$

相应的广义应力为横截面弯矩 $M(x)$ ，按惯例规定凸面向下的弯矩为正，因此

$$M(x) = EI\eta(x) = EIv'' = EI\psi'' U$$

这样单元刚度矩阵的计算就简化为一维积分(ψ'' 相当于 \mathbf{B} ， EI 相当于 E)

$$k^e = \int_0^L EI \psi''^T \psi'' dx \quad (3-31)$$

仍然可以得到(3-29)式的结果。同样和单位长度上的质量 $\bar{m} = \rho A$ ，单元质量矩阵的计算也可以简化为

$$m^e = \int_0^L \bar{m} \psi^T \psi dx \quad (3-32)$$

对于变截面非均匀梁，只需用点 x 处的抗弯刚度 $EI(x)$ 和分布质量 $m(x)$ 代替以上两式中的对应量，便可以求出相应的单元矩阵。

3.5 特性矩阵的线性近似

除了前一小节介绍的一致节点荷载和一致质量矩阵外，这两个特性矩阵的计算还可以进一步简化，采用线性近似的方法来计算，从而使体系自由度的数目和求解运动方程所需的计算工作量都大为减少。

3.5.1 分布荷载的线性近似

利用简单的静力学原理计算各单元的分布荷载的等效节点荷载，然后把汇聚于某节点所有单元的等效节点荷载累加起来，便得到了作用于该节点的外荷载。例如，对于图3-12

所示的简支梁，要计算作用于单元 e 的分布荷载的等效节点荷载，可以把单元 e 看作支撑在其节点上的简支梁，梁上作用有同样的荷载，然后计算它的支座反力，便可以确定这个单元的等效节点荷载。根据端点力矩为零，有

$$R_2 L = \int_0^L x p(x, t) dx$$

$$R_1 L = \int_0^L (L-x) p(x, t) dx$$

从而可求得支座反力 $R_k (k=1, 2)$ 。它们等于单元 e 传递给节点的力，但方向相反，这个力便是单元 e 的等效节点荷载。因此，单元 e 的等效节点荷载为

$$R_k = \int_0^L \psi_k(x) p(x, t) dx, \quad (k=1, 2)$$

式中

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad \psi_2(x) = \frac{x}{L}$$

显然这样做相当于采用线性插值式来计算单元的等效节点荷载。对于承受均布荷载 $p(x, t) = \bar{p}(t)$ 的单元来说，单元的等效荷载 $R_1 = R_2 = 0.5 \bar{p}(t) L$ 。把与节点 i 相邻单元的等效节点荷载累加起来，就得到作用于节点 R_i 的外荷载。用这样的方法只能产生平移自由度方向的广义力，除非外力矩直接施加在节点处，否则荷载向量中的转动分量为零。

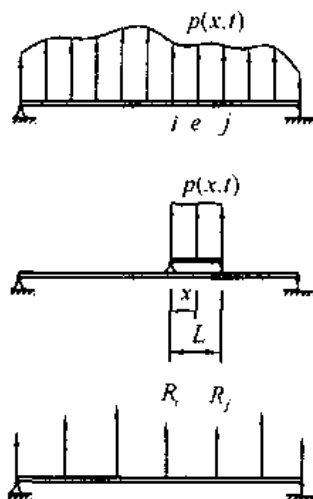


图 3-12 外荷载的线性近似

3.5.2 集中质量矩阵

表示结构惯性特性的最简单方法是把结构的质量集中于节点，然后每个可动节点都看作为一个质点，因此只有在结构的平移自由度方向才有惯性力，而转动方向的惯性力为零。这样便可以得到一个对角的集中质量矩阵。以图3-13所示的两端固定的梁为例，把梁划分为若干个单元，每个单元的质量都按静力的方法分配给它的节点。例如对于匀质等截面杆单元，则把其总质量的一半分配给它两端的节点。节点 i 处的集中质量 m_i 等于汇聚于该节点的所有单元分配质量之和。把节点 i 看作质量为 m_i 的质点，因此节点 i 在任何一个平移自由

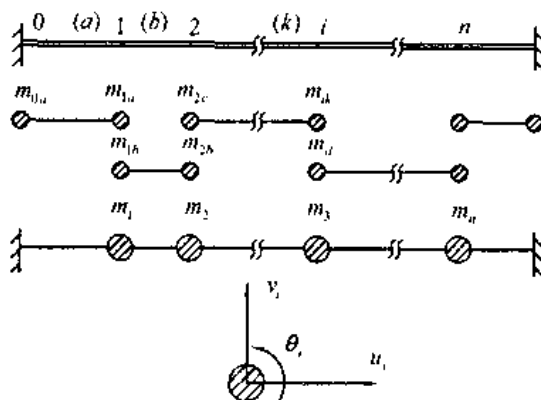


图 3-13 在梁节点上的集中质量

度方向上产生单位加速度所需要的在该方向施加的作用力都是 m_i 。由于质点的转动惯量为零,因此在节点 i 的转动自由度方向上不存在惯性力,所需施加的作用力也为零。如图3-13所示,假定每个节点取三个自由度,两个平移自由度和一个转动自由度,若把节点 i 的位移向量排列为

$$V_i = [u_i \quad v_i \quad \theta_i]^T$$

在结构质量矩阵中,与这个位移向量相对应的对角块为对角阵

$$m_{ii} = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

若按节点顺序来排列结构位移向量的分量,即

$$x = [V_1^T \quad V_2^T \quad \cdots \quad V_n^T]^T$$

则结构质量矩阵是对角阵

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & & & \\ & m_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{nn} \end{bmatrix}$$

质量矩阵的非对角块为零,这是因为任何一个质点的加速度只在本点产生惯性力,也只需在本点施加作用力来与它保持平衡。

按照结构位移向量分量的不同排列顺序,结构质量矩阵也有不同的形式。为了便于求解,常常把平移自由度排在前面,转动自由度排在后面,以 x_t 来表示平移自由度, x_θ 来表示转动自由度。对于前述的结构,这两个向量为

$$x_t = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_n \quad v_n]^T$$

$$x_\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_n]^T$$

结构的位移向量为

$$x = [x_t^T \quad x_\theta^T]^T$$

对应的集中质量矩阵为

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_n & & \\ & & & & m_n & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_n & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

显然当位移向量 x 中包括转动自由度时,结构的集中质量矩阵是一个降秩的对角阵,其秩数(在这里为 $2n$)正好等于位移向量中平移自由度的数目,这正是第1章定义的动力自由度。

如果每个节点只取横向位移一个平移自由度, 即

$$\mathbf{x} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^T$$

那么结构质量矩阵就变为

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

这是一个满秩的对角阵。也就是说, 当位移向量 \mathbf{x} 中仅包含平移自由度时, 对应的集中质量矩阵是一个满秩的对角阵。在此情况下, 体系的动力自由度数, 正好等于位移向量的维数。

在前面的讨论中我们看到, 对于质量和外荷载的计算可以采取两种不同的近似方法:

① 只考虑结构平移自由度的初级近似。初级近似的优点在于: 列式简单, 单元特性的计算和结构特性矩阵的集合过程都很简单; 结构特性矩阵的形式简单, 特别是集中质量矩阵是对角阵; 所考虑的自由度数大为减少。这种近似方法具有计算工作量小, 能获得较好的近似解的优点, 因此它在工程中被广泛地采用, 特别是对梁、柱和框架等结构来说, 其应用更为普遍。

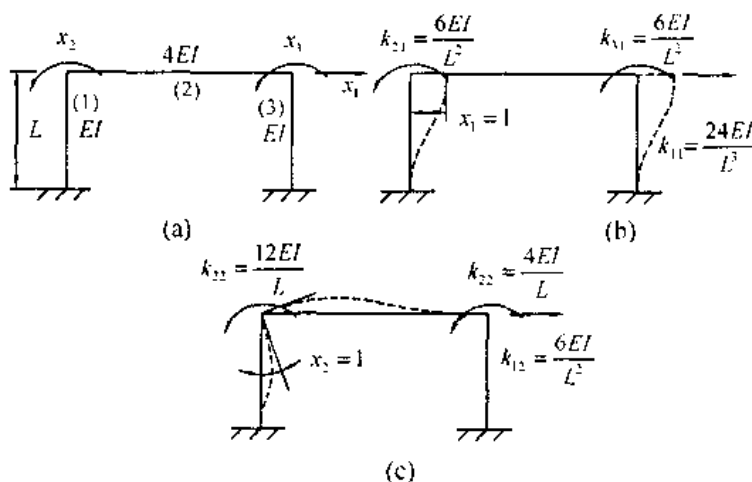
② 考虑平移和转动的一致近似。一致近似的好处是用统一的形状函数来计算单元特性矩阵, 给编程序上机计算带来一定方便; 能提高解的精度特别是能给出较准确的高频解。但这种近似方法因自由度数多, 计算工作量大, 对于只需求少数低频解的问题来说, 特别是用手算来解动力问题时, 往往采用线性近似, 而不采用一致近似。

3.6 框架结构运动方程的建立

框架结构原则上可考虑所有可动节点自由度, 按3.4节讨论的一般有限元列式过程来建立其运动方程。但在动力问题中, 常常忽略杆件的次要变形——轴向变形, 使自由度数大为减少, 而又能获得较好的低频解。下面以一个例题来说明, 在忽略轴向变形的情况下, 如何由影响系数的定义, 利用(3-29)和(3-30)两式给出的单元刚度矩阵和单元质量矩阵直接建立结构的相应特性矩阵。显然, 得到了结构的这个两特性矩阵, 立即就可以写出结构的运动方程。

例3-4 集合图3-14(a)所示框架结构的刚度矩阵和质量矩阵, 其分布质量示于图3-14(a)。

【解】 将每根杆视为一个单元, 其编号如图示。忽略杆



(a) 框架特性 (b) $x_1 = 1$ 时施加的力 (c) $x_2 = 1$ 时施加的力

图 3-14 框架刚度系数分析

件的轴向变形, 这个框架有三个自由度。根据刚度影响系数的定义, 依次使结构在每个自由度方向上产生单位位移, 同时约束其余两个自由度方向上的位移。由结构自由度与单元自由度的对应关系和(3-29)式, 可以确定在指定条件下各个单元产生的相应位移和所需施加的力。再利用自由度的对应关系便得到在结构各个自由度方向上所需施加的力, 这样便能逐列求出结构刚度矩阵中的元素。

按定义, 结构刚度矩阵第一列的元素 k_{1i} 为当 $x_1 = 1$ 时所需要的在 x_i 方向上施加的力。为此让结构产生如图3-14(b)所示的侧向位移, 显然通过单元(2)这个位移要刚性地传递给单元(1), 因此单元(1)和(3)都在各自的 U_1 方向上产生了单位位移。在此条件下, 在结构的 x_1 方向上施加的力为

$$k_{11} = k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(3)} = \frac{24EI}{L^3}$$

单元(1)在 U_1 方向上产生单位位移时, 需要在 U_2 方向上施加的力为 $k_{21}^{(1)}$, 它正好等于在结构 x_2 方向上所需施加的力。因此

$$k_{21} = k_{21}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}$$

同样

$$k_{31} = k_{31}^{(3)} = \frac{6EI}{L^2}$$

这样便求出结构刚度矩阵第一列的元素。

如图3-14(c)所示, 再使结构在 x_2 方向上产生单位转角。这时单元(1)和(2)都在各自的 x_2 方向上产生单位位移, 因此在结构的 x_2 方向上所需施加的力为

$$k_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} = \frac{4EI}{L} + \frac{(2L)^2 16EI}{(2L)^3} = \frac{12EI}{L}$$

在单元(1)的 U_1 方向上施加的力等于在结构的 x_1 方向上施加的力

$$k_{12} = k_{12}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}$$

在单元(2)的 U_4 方向上施加的力等于在结构的 x_3 方向上施加的力

$$k_{32} = k_{42}^{(2)} = \frac{8EI \times (2L)^2}{(2L)^3} = \frac{4EI}{L}$$

这样又求出结构刚度矩阵第二列的元素。

同样, 使结构在 x_3 方向产生单位转角, 又可求出结构刚度矩阵第三列中的元素。最后可得到结构刚度矩阵为

$$k = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(3)} & k_{21}^{(1)} & k_{31}^{(3)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{42}^{(2)} \\ k_{31}^{(3)} & k_{42}^{(2)} & k_{44}^{(2)} + k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix}$$

各单元的分布质量如图3-15(a)所示。结构的集中质量矩阵很容易求得: 将各单元质量的一半集中到构件的两端, 如图3-15(b)所示。当结构在 x_1 方向上产生单位加速度 $\ddot{x}_1 = 1$ 时, 因为梁没有轴向变形, 所以两个可动节点都具有同样的平移加速度, 在结构的 x_1 方向上所需施加的力为

$$m_{11} = 2 \times (1.5 + 0.5) \bar{m} L = 4 \bar{m} L$$

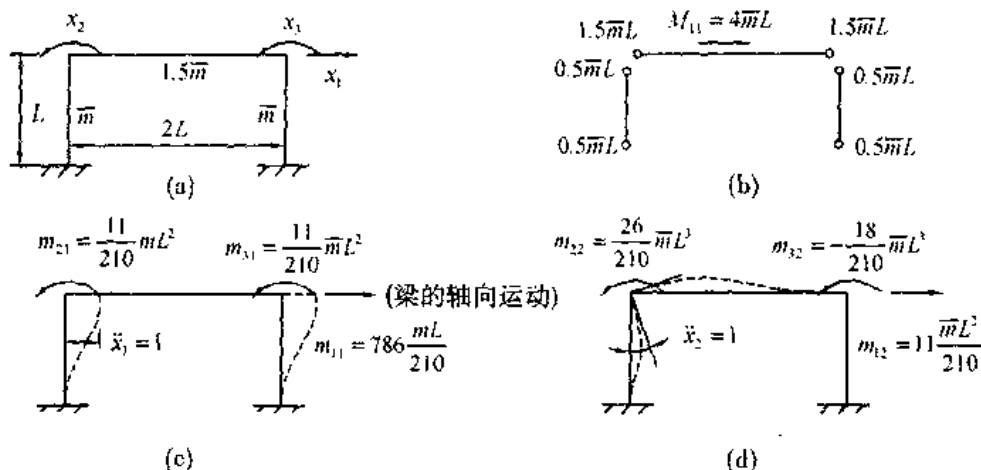


图 3-15 集中质量和一致质量矩阵的分析

由于质点没有转动惯量，集中质量矩阵的其他元素都为零，因此结构的集中质量矩阵为

$$m = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{bmatrix} 840 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

结构一致质量矩阵的组成过程与结构刚度矩阵的相类似。依次使结构在每个自由度方向上产生单位加速度，且同时使其余两个自由度方向上的加速度为零，利用(3-30)式便可以逐列定出结构的一致质量矩阵。但应当注意，当仅使结构在平移自由度 x_1 方向上产生单位加速度 $\ddot{x}_1 = 1$ ，用(3-30)式计算在 x_1 方向上所需施加的力 m_{11} 时，该式中的系数仅计算了对于单元①和单元③所需施加的横向力 $m_{11}^{(1)}$ 和 $m_{11}^{(3)}$ 。因此时单元②在 x_1 方向上作刚体运动，所以在结构 x_1 方向上施加的力应加上克服横梁在 x_1 方向上作刚体运动的惯性力，即单元②的质量 $3\bar{m}L$ 。其余质量系数的计算和刚度系数相类似。最后可得结构的一致质量矩阵为

$$m = \begin{bmatrix} m_{11}^{(1)} + m_{11}^{(3)} + 3\bar{m}L & m_{21}^{(1)} & m_{21}^{(3)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} + m_{22}^{(2)} & m_{32}^{(2)} \\ m_{31}^{(3)} & m_{42}^{(2)} & m_{44}^{(2)} + m_{22}^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{bmatrix} 786 & 11L & 11L \\ 11L & 26L^2 & -18L \\ 11L & -18L^2 & 6L^2 \end{bmatrix}$$

3.7 静力凝聚

考虑结构的运动方程(3-2)，当结构的阻尼为零，施加的外荷载为零时，无阻尼体系自由振动的运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3-35)$$

与单自由度体系的情况相类似，假定多自由度体系的自由振动是简谐运动，可写成

$$x(t) = e^{i\omega t} \hat{x} \quad (3-36)$$

式中 \dot{x} 为振动形状, 简称为振型。它不随时间变化, 只是表明振幅的大小。将上式代入(3-35)式, 消去公因子 $e^{i\omega t}$, 则得到无阻尼体系的特征方程

$$(k - \omega^2 m) \dot{x} = 0 \quad (3-37)$$

假定结构具有 n 个自由度, 其中有 n_t 个平移自由度和 n_θ 个转动自由度, 则体系的总自由度数 $n = n_t + n_\theta$ 。

当采用一致质量矩阵时, 结构质量矩阵 m 是对称正定的, 因此从方程(3-37)可以解出体系的 n 个特征对 ω_i^2 , $\dot{x}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。

当采用集中质量矩阵时, 质量矩阵 m 是(3-33)式给出的降秩对角阵, 因此方程(3-37)必须实施静力凝聚才能求解。

静力凝聚的过程如下: 以 \dot{x}_t 表示结构的平移位移向量, \dot{x}_θ 表示结构的转动位移向量, 它们分别是 n_t 维和 n_θ 维列向量。将结构振型向量中分量的顺序排列为 $\dot{x} = [\dot{x}_t^T \quad \dot{x}_\theta^T]^T$, 结构质量矩阵中元素的顺序也作相应的调整, 则可以按分块的形式写出特征方程(3-37)

$$\begin{bmatrix} k_{tt} & k_{t\theta} \\ k_{\theta t} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_\theta \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_\theta \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

展开上式的第二个矩阵方程

$$k_{\theta t} \dot{x}_t + k_{\theta\theta} \dot{x}_\theta = 0$$

因为结构刚度矩阵 k 是对称正定的, 其主子阵 $k_{\theta\theta}$ 也是对称正定的。因此从上式可以解出转动位移向量

$$\dot{x}_\theta = -k_{\theta\theta}^{-1} k_{\theta t} \dot{x}_t$$

将上式入(3-38)式的第一个矩阵方程, 可得到凝聚后的特征方程

$$k_t \dot{x}_t = \omega^2 m_{tt} \dot{x}_t \quad (3-39)$$

式中

$$k_t = k_{tt} - k_{t\theta} k_{\theta\theta}^{-1} k_{\theta t} \quad (3-40)$$

这样就把 n_θ 个转动自由度凝聚掉了, 变为(3-39)式所示的仅含 n_t 个平移自由度的特征方程, 使自由度数大为减少。

例3-5 从例3-4算得的刚度矩阵中消去两个转动自由度对应的元素, 得到与集中质量矩阵相匹配的刚度矩阵。

【解】 因为体系只有一个平移自由度 ($n_t = 1$), 所以凝聚后的刚度矩阵 k_t 是 1×1 阶的。与例3-4转动自由度对应的刚度子阵是

$$k_{\theta\theta} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix} = \frac{4EI}{L} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

它的逆矩阵是

$$k_{\theta\theta}^{-1} = \frac{L}{32EI} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

然后, 利用(3-40)式可算凝聚后的刚度矩阵

$$k_t = \frac{2EL}{L^3} \left(12 - \frac{2EI}{L^3} \cdot \frac{L}{32EI} [3L \quad 3L] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3L \\ 3L \end{bmatrix} \right) = \frac{39EI}{2L^3}$$

凝聚后的特征方程为

$$(19.5 \frac{EI}{L^3} - 4\bar{m}L\omega^2)x_1 = 0$$

3.8 频率向量与振型阵

重新写出无阻尼多自由度体系的广义特征方程(3-37)

$$(k - \omega^2 m)\dot{x} = 0$$

如前所述,对于一致质量矩阵, m 本身是对称正定的;对于集中质量矩阵,假定已进行静力凝聚, m 是满秩的对角阵,其对角元全为正,故仍然是对称正定的。在这两种情况下,刚度矩阵 k 和质量矩阵 m 都是对称正定的。为不失一般性,假定向量 \dot{x} 中有 n 个分量,且两个系数矩阵都是 n 阶方阵。以后,凡提到方程(3-37),均按上述含义来理解,不再重复。

从数学上讲,求广义特征方程(3-37)的解就是要找到某个广义特征根 ω_i^2 , 及其对应的广义特征向量 $\dot{x}_i \neq 0$, 它们满足方程(3-37)。

方程(3-37)可看作系数矩阵含未知量 ω^2 的关于未知向量 \dot{x} 的齐次方程。从线性代数知,齐次方程有非零解的充要条件是其系数阵的行列式为零

$$\det(k - \omega^2 m) = 0 \quad (3-41)$$

展开这个方程可以得到关于 ω^2 的 n 次代数方程,求解这个代数方程可以求得方程(3-37)的 n 个特征根 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ 。这 n 个特征根确定后,体系的振动频率,也就确定了,因此称方程(3-41)为频率方程。可以证明,当刚度矩阵 k 和质量矩阵 m 都是实对称正定阵时,这 n 个特征根都是正的实数。把它们按以小到大的顺序排列起来,即

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$$

为了简单,假定方程(3-41)没有重根,即上式中的小于等于号只取小于号(上式取等式即为“重频”情况,将于第5章讨论)。

将任意一个特征根 ω_i^2 代入特征方程(3-37),得到关于特征向量 \dot{x} 的齐次代数方程

$$(k - \omega_i^2 m)\dot{x}_i = 0 \quad (3-42)$$

显然其系数矩阵是元素为常量的降秩矩阵。由于特征根 ω_i^2 是单重根,故上式的系数矩阵秩数只降一阶,即其秩为 $n-1$ 。因此,未知向量 \dot{x}_i 中有一个且只有一个待定常数,同时(3-42)式的 n 个方程中有一个且只有一个是不独立的。特别地取 \dot{x}_i 的最后一个分量 $\dot{x}_{in} = 1$, 即

$$\dot{x}_i = [\dot{x}_{1i} \ \dot{x}_{2i} \ \dots \ \dot{x}_{(n-1)i} \ 1]^T \quad (3-43)$$

假定(3-42)式最后一个方程不独立,把它划去,并把前 $n-1$ 个方程的最后一列移到等号右边,得到

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \omega_i^2 m_{11} & \dots & k_{1(n-1)} - \omega_i^2 m_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1} - \omega_i^2 m_{(n-1)1} & \dots & k_{(n-1)(n-1)} - \omega_i^2 m_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1i} \\ \vdots \\ \dot{x}_{(n-1)i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{1n} - \omega_i^2 m_{1n} \\ \vdots \\ k_{(n-1)n} - \omega_i^2 m_{(n-1)n} \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

因为方程(3-42)的系数矩阵只降一秩,所以它去掉一行和一列的主子阵(即上式的系数矩阵)是满秩可逆的。因此从上式可以求出特征向量 \dot{x}_i 的其余 $n-1$ 个分量,然后由(3-43)式组成

\dot{x}_i 。应当指出,取特征向量的最后一个分量为1并不总是最好的,若取特征向量的最大分量为1,则能改善计算精度。当然在任何情况下都可以采用同样的求解过程,只要适当地重新排列 \dot{x}_i 中分量的顺序即可。

在结构动力问题中,特征根(也称为特征值)和特征向量都有确定的物理意义。第 i 个特征值 ω_i^2 是体系第 i 个振动频率 ω_i 的平方,其对应的特征向量 \dot{x}_i 代表体系的第 i 个振型。将全部频率按照从低频到高频的次序排列起来就组成一个向量

$$\omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n]^T \quad (3-45)$$

这个向量称为频率向量。

对应的 n 个振型列向量排列起来组成一个矩阵,这个矩阵称为振型阵。为了方便,通常把每一个振型都除以它的某个基准分量(通常取绝对值最大者),把振型向量表示为无量纲的形式。如取第 i 个振型 \dot{x}_i 中的分量 \dot{x}_{ii} 为基准分量,则这个振型的无量纲形式是

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{bmatrix} = \frac{1}{\dot{x}_{ii}} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1i} \\ \vdots \\ \dot{x}_{(n-1)i} \\ \dot{x}_{ii} \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

这个向量仍叫做体系的第 i 个振型,显然它仍然满足方程(3-42)。如果基准分量是原来振型向量 \dot{x}_i 中绝对值最大的分量,则振型 φ_i 中的最大分量为1。

将所有振型都化为无量纲形式,然后由这些无量纲振型排列为振型阵

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_n] \quad (3-47)$$

例3-6 计算图3-16所示框架的频率和振型。

[解] 如图3-16所示,假定横梁是刚性的,且集中了绝大部分质量,柱为无重杆,这便是一个质量弹簧体系。若只考虑侧向位移,则结构仅有三个自由度。易知:

$$k = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

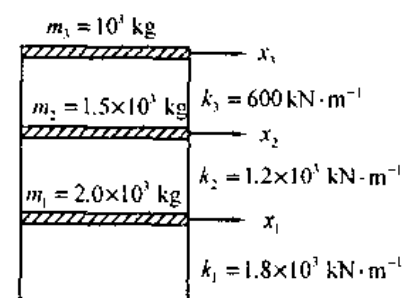


图 3-16 例 3-6 所用的框架

由此可得

$$k = 600 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}, \quad m = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$$

质量矩阵的单位是由 $10^3 \text{ kg} = (10^3 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1} = \text{kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ 得到的,这样写的目的是为了看清特征方程系数阵的单位。利用这两个矩阵,特征方程(3-37)的系数阵成为

$$k - \omega^2 m = 600 \begin{bmatrix} 5 - 2B & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 1.5B & -1 \\ 0 & -1 & 1 - B \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1} \quad (a)$$

式中

$$B = \frac{1}{600} \omega^2 \quad (\text{b})$$

令(a)式中方阵行列式的值等于零, 展开这个行列式, 化简可以得到关于 B 的三次方程

$$B^3 - 5.5B^2 + 7.5B - 2 = 0$$

利用求根的数值方法, 可求得这个方程的根是 $B_1 = 0.351$, $B_2 = 1.61$, $B_3 = 3.54$ 。再由(b)式可得

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 \\ 966 \\ 2124 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{bmatrix} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

为了计算简单, 可直接用上面求得的 B_i 来计算第 i 个振型。注意到(3-43)式表达的特征向量 \dot{x}_i , 可以看作(3-46)式中取基准分量为 \dot{x}_{ni} 的结果, 为了书写简便下面用 ϕ_i 来替代 \dot{x}_i , 表示第 i 个振型。这样(3-42)式就成为

$$600 \begin{bmatrix} 5-2B_i & -2 & 0 \\ -2 & 3-1.5B_i & -1 \\ 0 & -1 & 1-B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

消去常数因子600, 实施分块矩阵的乘法运算, 然后划去最后一个方程, 再把前两个方程最后一列移到等号右边, 得

$$\begin{bmatrix} 5-2B_i & -2 \\ -2 & 3-1.5B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

这是(3-44)式的另一种表达形式。由上式可得

$$\begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-2B_i & -2 \\ -2 & 3-1.5B_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将前面算得的 B_i 代入上式, 就能求得结构的三个振型的前两个分量, 例如振型:

$$B_1 \approx 0.351$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.298 & -2 \\ -2 & 2.474 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6.631} \begin{bmatrix} 2.474 & 2 \\ 2 & 4.298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.302 \\ 0.648 \end{bmatrix}$$

同样, 利用 B_2 和 B_3 的值可求得其余两个振型的前两个分量。各个振型最后一个分量的值均为1.0 ($\phi_{2i} = 1.0$), 因此结构的三个振型是

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.302 \\ 0.648 \\ 1.00 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -0.676 \\ -0.601 \\ 1.00 \end{bmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 2.48 \\ -2.58 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

这三个振型示于图3-17中。

在振型图中, 包括支座在内, 位移为零的点称为节点。对于只有一个支座的结构来说, 振型的节点数正好等于振型的序号。根据这个原则, 当给定振型图后, 就可以判定它是第几个振型。

本节讨论的由作用力方程求解振动频率和振型的方法同样适用于位移方程。在(3-7)式

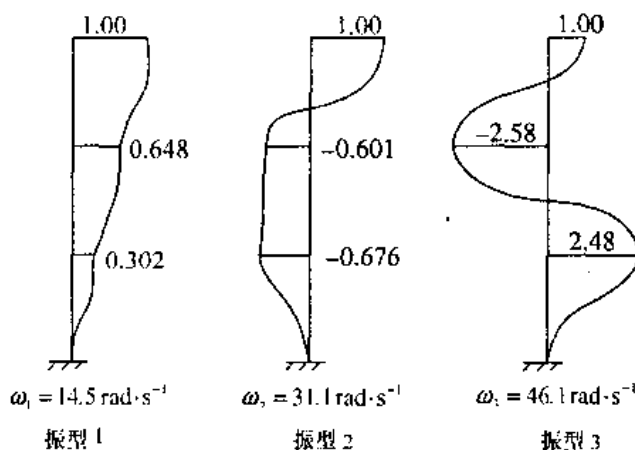


图 3-17 图 3-16 框架的振型

中, 令 $p(t) = 0$, 得到如下自由振动方程

$$\tilde{f} m \ddot{x} + x = 0 \quad (3-48)$$

将(3-36)式代入上式, 得

$$\left(\tilde{f} m - \frac{I}{\omega^2} \right) \dot{x} = 0 \quad (3-49)$$

式中 I 为 n 阶单位矩阵。如前所述, 要求得非零的振型 \dot{x} , 必须其系数矩阵行列式的值为零。这样就得到与(3-41)式相对应的方程

$$\det \left(\tilde{f} m - \frac{I}{\omega^2} \right) = 0 \quad (3-50)$$

由前面的方法, 可求得特征问题(3-49)的特征值 $\frac{1}{\omega_i^2}$ 。注意它代表频率平方的倒数, 而不是频率的平方。由方程(3-41)和(3-50)都能求得体系的振动频率, 因此把这两个方程都叫做频率方程。求得振动频率后, 求振型的方法与前述完全相同。如果不计比例常数, 在两种情况下求得的振型是一致的。

在用计算机求解时, 总希望特征方程(3-50)中的系数矩阵是对称的, 这样可以减小存储量。但在该式中, $\tilde{f}m$ 一般不具有对称性, 因此需要通过适当的变换, 保持系数矩阵的对称性, 这种变换将在第6章中讲到。

3.9 正交条件

3.9.1 基本条件

多自由度体系自由振动的振型 φ_i , 具有非常重要的性质, 它们在结构动力分析中是极其有用的。这些性质称为正交关系, 可以用数学方法来加以证明。

以无量纲的振型 φ_i 替代方程(3-42)中的 \dot{x}_i , 并把该式改写为

$$k\varphi_i = \omega_i^2 m\varphi_i \quad (3-51)$$

同样, 对于第 j 个振动频率和振型, 有

$$k\varphi_j = \omega_j^2 m\varphi_j \quad (3-52)$$

将(3-51)式两边转置, 然后右乘 φ_j , 由于 k 和 m 都是对称的, 得到

$$\varphi_i^T k\varphi_j = \omega_i^2 \varphi_i^T m\varphi_j \quad (3-53)$$

将(3-52)式两边左乘 φ_i^T , 得

$$\varphi_i^T k\varphi_j = \omega_j^2 \varphi_i^T m\varphi_j \quad (3-54)$$

(3-53)式减去(3-54)式得

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \varphi_i^T m\varphi_j = 0 \quad (3-55)$$

如果 $i \neq j$ 时, 有 $\omega_i \neq \omega_j$, 由上式必有

$$\varphi_i^T m\varphi_j = 0, \quad i \neq j \quad (3-56)$$

再由(3-53)式可得

$$\varphi_i^T k\varphi_j = 0, \quad i \neq j \quad (3-57)$$

上面两式表明, 对应于不同振动频率的两个振型, 既关于质量矩阵正交, 又关于刚度矩阵正交, 这就是振型正交的基本条件。

除了以上二个基本的正交条件, 还可证明如下的更一般的正交条件, 即

$$\varphi_i^T m(m^{-1}k)^P \varphi_j = 0, \quad i \neq j \text{ 且 } -\infty < P < \infty$$

式中, P 为整数。易知当 $P=0$ 或 1 时即为式(3-56)与式(3-57)。

3.9.2 规格化

设向量 \hat{x}_i 是由特征方程(3-37)确定的结构振型, 则它除以任何非零的常数 a 也是结构的振型

$$\varphi_i = \frac{1}{a} \hat{x}_i \quad (3-58)$$

这就是说, 振型的幅值是任意的, 只有振动的形状才是唯一的。

按照常数 a 的不同取值, 可以得到不同的规格化。取 a 为振型 \hat{x}_i 中某个特定坐标分量的值, 这相当于把这个坐标分量的幅值取为1, 如像(3-43)式所示的那样, 取 $\hat{x}_{in} = 1$, 并以这个指定值为基准来确定其他位移, 这叫做关于特定坐标分量的振型规格化。这种规格化的结果是在每一个振型向量中, 这个特定坐标分量的值都是1。

如果 a 不是取特定坐标分量的值, 而是取振型 \hat{x}_i 中绝对值最大的分量的值, 那么规格化的结果是在每一个振型向量中最大分量的值都是1。这为后面的计算提供了方便、实用的数据, 有益于提高精度。

还有一种规格化称为关于质量矩阵的正交规格化。这是使用计算机进行结构振动分析时最常用的一种规格化方法。该方法先利用已知振型 \hat{x}_i 计算标量因子

$$\hat{x}_i^T m \hat{x}_i = M_i \quad (3-59)$$

然后取

$$a = \sqrt{M_i}$$

由(3-58)式即可算得规格化后的振型 ϕ_i 。这个振型显然满足

$$\phi_i^T m \phi_i = \frac{1}{M_i} \hat{x}_i^T m \hat{x}_i = 1 \quad (3-60)$$

对于所有的振型都进行了如上的处理, 然后按(3-47)式排列出振型阵 Φ , 利用(3-60)式和正交关系(3-56)式, 这个振型阵显然满足

$$\Phi^T m \Phi = I \quad (3-61)$$

式中 I 为 $n \times n$ 阶单位矩阵。用上述方法进行规格化后的振型叫做对于质量矩阵的正交规格化振型。

例3-7 对于例3-6算得的振型按质量矩阵进行正交规格化。

[解] 为了便于区分, 这里用符号 \hat{x}_i 来表示前例所得的振型。因为质量阵 m 是对角阵, 因此(3-60)式给出的规格化因子是

$$M_i = \sum_{j=1}^3 x_{ij}^2 m_j$$

利用已知结果, 例如第一振型

$$\hat{x}_1 = [0.302 \quad 0.648 \quad 1.000]^T$$

代入(a)式可算得

$$M_1 = 1.813$$

同样可算得

$$M_2 = 2.456, \quad M_3 = 23.29$$

分别用这些因子的平方根去除对应的振型, 就得规格化后的振型矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.2243 & -0.4314 & 0.5139 \\ 0.4814 & -0.3835 & -0.5347 \\ 0.7428 & 0.6381 & 0.2072 \end{bmatrix}$$

最后按(3-61)式进行验算, 有

$$\Phi^T m \Phi = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.004 & -0.002 \\ 0.004 & 1.000 & -0.004 \\ -0.002 & -0.004 & 1.000 \end{bmatrix}$$

上述结果与期望的单位矩阵有微小差别, 这是由舍入误差引起的。

3.10 正则坐标

对于 n 个自由度的体系, 可以从特征方程(3-37)确定 n 个特征值 ω_i^2 和特征向量——振型 $\phi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。假定各特征值互异 $\omega_i^2 \neq \omega_j^2 (i \neq j)$, 由线性代数可知, 不同特征值对应的特征向量是线性无关的, 因此这 n 个振型是线性无关的。又因任意 n 个线性无关的向量都构成 n 维空间的一组基底, 任何一个 n 维向量 x 都可以用这组基底的线性组合来表示, 因此有

$$x = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \dots + \phi_n y_n = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i \quad (3-62)$$

成立,在数学上, y_i 称为组合系数。如果向量 x 是时间 t 的函数 $x = x(t)$, 则组合系数 y_i 也是时间 t 的函数, $y_i = y_i(t)$ 。因此(3-62)式又可写为

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i(t) \quad (3-62a)$$

在结构动力问题中,可对上式各个符号给出确定的物理意义。其中, $x(t)$ 表示结构的位移向量,其分量是以基本单位向量 e_i (这个向量的第 i 个分量为1,其余分量全为零)为基底的组合系数或称为坐标。向量 $x(t)$ 的每个分量给定后,结构位移的几何形状就完全确定,因此又把它称为结构的几何坐标。 ϕ_i 表示结构的第 i 个振型,它与时间 t 无关; $y_i(t)$ 表示第 i 个振型的贡献,它是以振型 ϕ_i 为基底的坐标,因此称为广义坐标或结构的正则坐标。

为了书写简便,略去位移向量 $x(t)$ 和正则坐标 $y_i(t)$ 中的时间变量 t , 以矩阵形式写出(3-62a)式

$$x = \Phi Y \quad (3-63)$$

式中,矩阵 Φ 为结构的振型矩阵,又可以把它看作为一个坐标变换矩阵。显然它的作用是把结构的广义坐标 Y , 变换成结构的几何坐标 x 。因为振型阵 Φ 的各列是线性无关的,因此这个矩阵是满秩可逆的。

引入变换式(3-63)后,将无阻尼体系的运动方程两边前乘 Φ^T , 利用正交条件(3-56)和(3-57)两式,便可得到 n 个关于正则坐标 $y_i(t)$ 的单自由度方程。但一般说来,振动结构的初始条件是以结构的初始位移 $x(0)$ 和速度 $\dot{x}(0)$ 的形式给出的,如何把它们转换成正则坐标 $Y(t)$ 的初始条件呢?当然,原则上可利用振型阵 Φ 的可逆性,由(3-63)式求得。为了避免矩阵求逆,利用正交条件(3-56)式,可求得正则坐标的任意分量 y_i 的初始条件。现进一步说明,将(3-63)式两边前乘 $\phi_i^T m$, 得

$$\phi_i^T m x = \phi_i^T m \Phi Y$$

展开上式的右边

$$\begin{aligned} \phi_i^T m \Phi Y &= \phi_i^T m [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \phi_i^T m (\phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \cdots + \phi_n y_n) = \\ &= \phi_i^T m \phi_1 y_1 + \phi_i^T m \phi_2 y_2 + \cdots + \phi_i^T m \phi_n y_n \end{aligned}$$

利用正交条件(3-56)式,上式最后一个等号后边仅 $\phi_i^T m \phi_i y_i$ 这一项非零,其余各项均为零,因此

$$\phi_i^T m x = \phi_i^T m \phi_i y_i \quad (3-64)$$

从而

$$y_i = \frac{\phi_i^T m x}{\phi_i^T m \phi_i} \quad (3-65)$$

以上表达式适用于每一个正则坐标。

将给定的初始条件 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 代入(3-65)式,便可分别求出正则坐标的初始条件 $y_i(0)$ 和 $\dot{y}_i(0)$ 。

3.11 无阻尼体系非耦合的运动方程

利用正交条件(3-56)和(3-57)两式可以解除多自由度体系各自由度之间的耦合,得到 n 个单自由度体系的运动方程。这为计算多自由度体系的反应带来了极大的方便。

重新写出无阻尼多自由度体系的运动方程

$$m\ddot{x} + kx = p(t)$$

引入(3-63)式,注意到振型矩阵 Φ 不随时间 t 变化,得

$$m\Phi\ddot{Y} + k\Phi Y = p(t) \quad (3-66)$$

将上式等号两边前乘第 i 个振型的转置 φ_i^T , 得

$$\varphi_i^T m\Phi\ddot{Y} + \varphi_i^T k\Phi Y = \varphi_i^T p(t) \quad (3-67)$$

如同推导方程(3-64)的过程一样,展开上式左边的两项。利用正交关系(3-56)和(3-57)两式,可得

$$\varphi_i^T m\varphi_i \ddot{y}_i + \varphi_i^T k\varphi_i y_i = \varphi_i^T p(t) \quad (3-68)$$

定义新的符号

$$M_i = \varphi_i^T m\varphi_i \quad (3-69a)$$

$$K_i = \varphi_i^T k\varphi_i \quad (3-69b)$$

$$P_i(t) = \varphi_i^T p(t) \quad (3-69c)$$

M_i , K_i , $P_i(t)$ 分别称为第 i 个振型对应的广义质量、广义刚度和广义荷载。将以上广义特性代入(3-68)式,则得到第 i 个振型正则坐标的单自由度运动方程

$$M_i \ddot{y}_i + K_i y_i = P_i(t) \quad (3-70)$$

依次令 $i=1, 2, \dots, n$, 就可写出 n 个独立的正则坐标的方程。每一个方程都是不含耦合项的单自由度运动方程,可以用第2章的知识求得任意时刻正则坐标的反应 $y_i(t)$ 。所有正则坐标的反应都求出后,再按(3-63)式把各个正则坐标的反应叠加起来,求出结构在几何坐标中的反应,这种方法叫做振型叠加法。当 n 很大时,并不是所有正则坐标的反应都必须求出,一般说来低频振型分量起的作用较大,随着频率的升高,相应振型分量的作用逐渐减小。如当取前 p 个振型分量算得的位移

$$x = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \dots + \varphi_p y_p$$

已达到要求精度时,就不必再计算后面各个高频振型分量的作用了。

在(3-53)式中,令 $j=i$, 可求得第 i 个振型正则坐标的广义刚度和广义质量之间的关系

$$K_i = \omega_i^2 M_i \quad (3-69d)$$

当体系自由度较少时,振型叠加法同样可用于求动力问题的精确解,以下例说明。

例3-8 已知图3-18所示质量弹簧体系的质量为 $m_1 = 2 \times 10^5 \text{ kg}$, $m_2 = 10^5 \text{ kg}$; 弹簧

$k_1 = 4.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$, $k_2 = 2.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$, $k_3 = 2.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$;

设该体系在冲击荷载 $p(t) = [0 \quad 10]^T$ 作用下,其初始条件为 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 。求该体系的位移反应表达式。

【解】 图3-18所示体系为无阻尼体系,其运动方程具

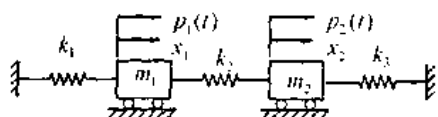


图 3-18 两自由度无阻尼体系

有(3-27)式的形式, 相应的系数矩阵为

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-1}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$$

式中质量单位是由 $10^5 \text{ kg} = 1.0 \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-1}$ 得到的。这样写的目的是为了使质量和刚度的单位具有相同的力的单位和相同的长度单位, 便于计算。

利用频率方程(3-41), 有

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) = 2(\omega^4 - 7\omega^2 + 10) = 2(\omega^2 - 2)(\omega^2 - 5) = 0$$

因此, $\omega_1^2 = 2$, $\omega_2^2 = 5$ 。分别将它们代入方程(3-42), 可求得相应的振型

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

再利用(3-59)式, 可得这两个振型所对应的广义质量是 $M_1 = 3 \times 10^5 \text{ kg}$, $M_2 = 6 \times 10^5 \text{ kg}$ 。关于质量矩阵 \mathbf{m} 规格化后的两个振型为

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \frac{1}{\sqrt{M_1}} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \frac{1}{\sqrt{M_2}} \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

利用(3-47)式, 可组合出相应的振型矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 。由上述两个振型和(3-69)式, 可求得与 $\boldsymbol{\Phi}$ 相对应的广义质量

$$M'_1 = M'_2 = 1.0 \times 10^5 \text{ kg}$$

广义刚度

$$K_1 = 2.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}, \quad K_2 = 5.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$$

广义荷载

$$P_1(t) = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ kN}, \quad P_2(t) = -10\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ kN}$$

这样, (3-70)式表达的非耦合的运动方程就成为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2y_1 &= \frac{10}{\sqrt{3}} \\ \ddot{y}_2 + 5y_2 &= -10\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

将初始条件 $\mathbf{x}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ 代入(3-65)式, 可得

$$y_i(0) = \dot{y}_i(0) = 0, \quad (i=1,2) \quad (\text{c})$$

由2.8节知, 单自由度体系在矩形脉冲作用下, 运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = p_0$$

当初始条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 时, 其解为

$$x(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t) \quad (\text{d})$$

式中 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。由(b)式和(a)式可看出, 每个正则坐标 $y_i(t) (i=1,2)$, 都是单自由度体系在矩形脉冲作用下, 且初始条件为零的振动问题。将具体数值代入(d)式, 两个正则坐标的解为

$$y_1(t) = \frac{5}{\sqrt{3}}(1 - \cos\sqrt{2}t), \quad y_2(t) = -2\sqrt{\frac{2}{3}}(1 - \cos\sqrt{5}t)$$

将正则坐标的解及振型 Φ 代入(3-63)式, 可求得几何坐标的精确解

$$x(t) = \Phi Y(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{3}\cos\sqrt{2}t + \frac{2}{3}\cos\sqrt{5}t \\ 3 - \frac{5}{3}\cos\sqrt{2}t - \frac{4}{3}\cos\sqrt{5}t \end{bmatrix} \quad (e)$$

为了便于同第4章的数值积分结果相比较, 取 $t = n\Delta t$ ($\Delta t = 0.28\text{ s}$, $n = 1, 2, \dots, 12$), 计算每一时刻 t 位移反应的精确解示于表3-1。

表3-1 体系在各时刻的位移反应

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移	0.006	0.045	0.170	0.520	1.05	1.72	2.34	2.86	3.05	2.80	2.13	1.16
x	0.379	1.42	2.79	4.12	5.04	5.33	4.99	4.28	3.46	2.81	2.43	2.49

3.12 阻尼体系非耦合的运动方程

在有阻尼条件下, 体系的运动方程如(3-2)式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

在此情况下, 我们仍然先求无阻尼条件下特征方程(3-37)的解 ω_i^2 和 ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)。因这 n 个特征向量是线性无关的, 它们构成 n 维空间的一组基底, 有阻尼条件下的位移向量 x , 仍然可以像(3-63)式那样, 用这一组基底的线性组合来表示。将(3-63)式代入(3-2)式, 注意到振型矩阵 Φ 与时间 t 无关, 两边前乘 ϕ_i^T 后得

$$\phi_i^T m \Phi \ddot{Y} + \phi_i^T c \Phi \dot{Y} + \phi_i^T k \Phi Y = \phi_i^T p(t) \quad (3-71)$$

如前一小节所述, 利用正交条件(3-56)和(3-57)两式, 即可把(3-71)式左边非阻尼项的耦合解除, 简化为只含一个正则坐标 y_i 的项。如果阻尼矩阵不满足正交条件, 振动分析将变得十分复杂。为了沿用无阻尼体系的分析方法, 工程上常采用近似的处理办法, 假定阻尼矩阵也满足同样的正交条件, 即

$$\phi_i^T c \phi_j = 0, \quad i \neq j \quad (3-72)$$

除了(3-69)式给出的三个广义物理特性外, 再引入第 i 个正则坐标的广义阻尼 C_i , 这四个广义物理特性一并写为

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \phi_i^T m \phi_i \\ K_i &= \phi_i^T k \phi_i = \omega_i^2 M_i \\ C_i &= \phi_i^T c \phi_i = 2\xi_i \omega_i M_i \\ P_i &= \phi_i^T p(t) \end{aligned} \right\} \quad (3-73)$$

式中, 广义阻尼表达式是参照(2-37)式来定义的。当无阻尼体系自由振动的分析完成后, 频率 ω_i 和广义质量 M_i 都是已知的。第 i 个振型的阻尼比 ξ_i 可通过对类似结构的实验来确定。例如对类似结构施加激励, 使它以频率 ω_i 进行振动, 测得的阻尼比即是 ξ_i 。

引入(3-72)和(3-73)两式后, (3-71)式变为关于正则坐标 y_i 的单自由度体系的运动方程

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = P_i(t) \quad (3-74a)$$

或者

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{1}{M_i} P_i(t) \quad (3-74b)$$

这就解除了各自由度之间的耦合，又可以用单自由度体系的有关知识来求解每个正则坐标的动力反应。

为了得到正交条件(3-72)式，工程上常采用的近似处理办法有：

① 忽略阻尼力中的耦合项，即认为

$$\varphi_i^T c \Phi \dot{Y} \approx \varphi_i^T c \varphi_1 \dot{y}_1 + \varphi_i^T c \varphi_2 \dot{y}_2 + \cdots + \varphi_i^T c \varphi_n \dot{y}_n \approx \varphi_i^T c \varphi_i \dot{y}_i = C_i \dot{y}_i \quad (3-75)$$

这种处理办法往往可以得到较好的近似解。

② 将阻尼矩阵 c 假设为比例阻尼，即假设阻尼矩阵为下列形式

$$c = a_0 m + a_1 k \quad (3-76)$$

式中 a_0 ， a_1 为常数。这样(3-74a)式中速度项的系数就成为

$$C_i = \varphi_i^T (a_0 m + a_1 k) \varphi_i = a_0 M_i + a_1 K_i \quad (3-77)$$

引入(3-73)式后，可得

$$\xi_i = \frac{a_0 M_i + a_1 K_i}{2\omega_i M_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_i} + a_1 \omega_i \right) \quad (3-78)$$

上式右端括号中的第一项与振动频率 ω_i 成反比，而第二项与 ω_i 成正比，这就是比例阻尼中 $a_0 m$ 与 $a_1 k$ 两项所起的不同作用。

③ 由实验测定各个振型阻尼比，并将(3-69)式代入(3-70)式后，则有

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{1}{M_i} P_i(t)$$

用前述的实验方法直接测定第 i 个振型正则坐标的阻尼比 ξ_i ，然后将阻尼项加到上式左边，就得到(3-74b)式。这种作法比较方便，它避免了首先确定显式的阻尼矩阵 c ，有较大的实用价值，但只适用于阻尼比 $\xi_i \leq 0.2$ 的情况。

3.13 振型叠加法概要

假定结构有 n 个自由度，满足线弹性条件，且用阻尼比 ξ_i 来表示结构阻尼，引入坐标变换(3-63)式，则可以把它的运动方程变为 n 个关于正则坐标 $y_i(t)$ 的非耦合的运动方程，这是振型叠加法的基础。然后分别计算每个振型正则坐标 $y_i(t)$ 的反应，再利用(3-63)式进行叠加，就得到位移在几何坐标中的反应。这是振型叠加法的主要分析过程，它一共分为八步，概述如下：

① 建立运动方程，即

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

② 进行振型和频率分析。

无阻尼自由振动的振动频率和振型由特征方程(3-37)式，即

$$(k - \omega^2 m)\dot{x} = 0$$

确定。结构的 n 个频率和振型都求出后，可建立频率向量 ω 和振型矩阵 Φ 。

③ 计算广义质量、广义荷载和广义阻尼，即

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \varphi_i^T m \varphi_i \\ P_i(t) &= \varphi_i^T p(t) \\ C_i &= \varphi_i^T c \varphi_i = 2\xi_i \omega_i M_i \end{aligned} \right\}$$

④ 写出非耦合的运动方程，即(3-74b)

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{1}{M_i} P_i(t)$$

⑤ 计算结构在正则坐标下对荷载的反应。

由(2-105)式，每个正则坐标对荷载的反应可由如下杜哈梅尔积分算出

$$y_i = \frac{1}{M_i \omega_{Di}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{Di} (t-\tau) d\tau \quad (3-79)$$

式中 $\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}$ 为第 i 个振型正则坐标的阻尼振动频率。

⑥ 计算结构在正则坐标下反应的自由振动项部分。

(3-79)式仅适用于初始条件为零的体系。如果初始条件不为零，还必须加上自由振动项，为了计算正则坐标的自由振动项，首先要计算它的初始条件。由(3-65)式，当结构的初始条件给定后，可由以下两式算得第 i 个振型正则坐标的初始条件

$$\left. \begin{aligned} y_i(0) &= \frac{1}{M_i} \varphi_i^T m x(0) \\ \dot{y}_i(0) &= \frac{1}{M_i} \varphi_i^T m \dot{x}(0) \end{aligned} \right\} \quad (3-80)$$

然后由(2-42)式，在有阻尼条件下，正则坐标反应的自由振动项为

$$y_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[\frac{\dot{y}_i(0) + \xi_i \omega_i y_i(0)}{\omega_{Di}} \sin \omega_{Di} t + y_i(0) \cos \omega_{Di} t \right] \quad (3-81)$$

⑦ 计算结构在几何坐标下的位移反应。

将(3-81)式和(3-79)式的结果相加，得时刻 t 正则坐标总的反应 y_i 。算出每个正则坐标的反应后，由式(3-63)，即

$$x(t) = \Phi Y(t)$$

可算出在几何坐标下的位移反应。按振型分量形式可写出以下式子

$$x(t) = \varphi_1 y_1(t) + \varphi_2 y_2(t) + \cdots \quad (3-82)$$

这就是说，总的位移反应等于各个振型对反应的贡献相叠加，因此这种方法叫做振型叠加法。应当说明，低频振型的贡献大，高频振型的贡献明显地逐渐减小，而且高频振型的可靠性也较差。由于这两个原因，在计算系统的位移反应时，只需要取若干个低频项，当算得的反应达到要求精度时，便可舍去其余的高频项，而不需要计算所有振型项。

⑧ 计算弹性力的反应。

结构设计是以构件的内力为依据，求出位移反应的时程函数 $x(t)$ 后，还必须计算结构的内力，最主要的是结构抵抗弹性变形的弹性力

$$f_s(t) = kx(t) = k\Phi Y(t) \quad (3-83)$$

按振型向量的形式可把上式写为

$$f_s(t) = k\phi_1 y_1(t) + k\phi_2 y_2(t) + \dots$$

将(3-51)式代入上式, 得

$$f_s(t) = \omega_1^2 m\phi_1 y_1(t) + \omega_2^2 m\phi_2 y_2(t) + \dots \quad (3-84)$$

将(3-84)式与(3-82)式进行比较, 在计算弹性力的动力反应时, 每一振型项都要乘以相应频率的平方, 说明高频振型仍然起着较大的作用。因此, 为了达到同样的精度, 计算弹性力所包含的振型向量数要比计算位移所包含的振型向量数多些。

(3-84)式可简写为如下矩阵形式:

$$f_s(t) = m\Phi\{\omega_i^2 y_i(t)\} \quad (3-85)$$

式中, $\{\omega_i^2 y_i(t)\}$ 表示一向量, 该向量的分量为每一个振型的正则坐标与相应频率平方的乘积。

在计算各构件内力时, 常可在局部坐标下作局部分析。

例3-9 以图3-16所示三层框架结构为例来说明用振型叠加法分析结构自由振动位移反应的步骤。

[解] 在例3-6中已给出振型叠加法前两步的结果, 这里先列出结构物理特性矩阵和振动特性矩阵

$$m = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}, \quad k = 600 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{bmatrix} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0.302 & -0.676 & 2.48 \\ 0.648 & -0.601 & -2.58 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

第三步要求计算广义质量和广义荷载。对于自由振动, 施加荷载 $p(t)$ 为零, 广义荷载也为零, 因此只需计算广义质量。例3-7已给出了计算结果, 把它们写为矩阵的形式

$$M = \Phi^T m \Phi = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.812 & 0 & 0 \\ 0 & 2.456 & 0 \\ 0 & 0 & 23.29 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$$

这个矩阵称为广义质量矩阵。

对于无阻尼体系的自由振动, 第四步和第五步都不必进行, 现在考虑第六步, 计算正则坐标的自由振动, 假定结构的初始条件为

$$x(0) = [0.3 \quad 0.4 \quad 0.5]^T \text{ cm}, \quad \dot{x}(0) = [0 \quad 9 \quad 0]^T \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

先讨论正则坐标的初始位移 $Y(0)$ 。为了减少计算工作量, 由(3-80)式, 可先计算矩阵乘积

$$mx(0) = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

将上式代入(3-80)式的第一个表达式, 有

$$y_i(0) = \frac{1}{M_i} \phi_i^T m x(0) = \frac{1}{M_i} \phi_i^T \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

将已知数据代入, 可求得

$$Y(0) = [0.591 \quad -0.108 \quad 1.89 \times 10^{-2}]^T \text{ cm}$$

类似地, 利用(3-80)式的第二个表达式和已知数据, 可得正则坐标的初始速度

$$\dot{Y}(0) = [4.82 \quad -3.30 \quad -1.50]^T \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

注意到在(3-80)式中, 质量矩阵 m 和广义质量 M_i 具有相同的量纲, 振型 ϕ_i^T 无量纲, 因此正则坐标的初始位移和速度的单位应与结构几何坐标的相应物理量一致。

在无阻尼条件下, (3-81)式成为

$$y_i(t) = \frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t + y_i(0) \cos \omega_i t$$

将上面求得的正则坐标的初始条件和振动频率代入这个表达式, 就得到各正则坐标的自由振动反应

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.333 \sin \omega_1 t \\ -0.106 \sin \omega_2 t \\ -3.25 \times 10^{-2} \sin \omega_3 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.591 \cos \omega_1 t \\ -0.108 \cos \omega_2 t \\ 1.90 \times 10^{-2} \cos \omega_3 t \end{bmatrix}$$

其单位为 cm。若将此结果代入叠加关系(3-63)

式, 可求得各层的自由振动运动。显然每一层的运动都包含各个振动频率的贡献。利用(3-85)式又可以求得各个自由度方向的弹性力, 进一步确定各层立柱的剪力。

例3-10 假定图3-19所示框架的物理特性与图3-16的相同, 计算它在冲击荷载

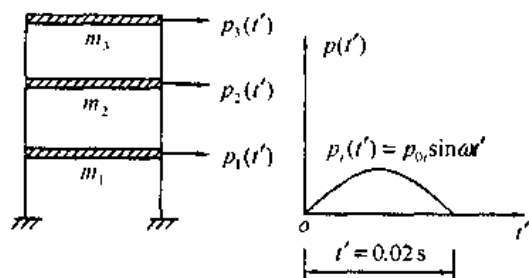


图 3-19 承受冲击荷载的框架

$$p(t') = \begin{bmatrix} p_1(t') \\ p_2(t') \\ p_3(t') \end{bmatrix} = \sin \bar{\omega} t' \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ kN}, \quad \begin{cases} t_1 = 0.02 \text{ s} \\ 0 \leq t' \leq t_1 \end{cases}$$

作用下的动力反应。(这里用 t' 来表示荷载作用的时间, 以免同新设的位移反应时间混淆)。

解 由2.8节, 单自由度体系在正弦半波脉冲作用下, 自由振动阶段的位移反应为

$$x(\bar{t}) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \alpha \bar{t} + x(t_1) \cos \alpha \bar{t}, \quad \bar{t} = t' - t_1 \geq 0$$

仿照(2-30)式的做法, 可把这个表达式写为一个三角函数的形式

$$x(\bar{t}) = \rho \sin(\alpha \bar{t} + \theta) \quad (\text{a})$$

式中 ρ 表示最大位移, 由(2-74)式它又可以表示为

$$\rho = D \frac{p_0}{k}$$

式中 D 为动力放大系数, 可根据脉冲作用时间 t_1 与体系固有周期 T 的比值, 从图2-22查得。重新定义时间坐标的原点, (a)式的位移反应可表示为

$$x(t) = D \frac{P_0}{k} \sin \omega t$$

对正则坐标 y_i 进行如上处理, 则可把它表示为

$$y_i(t) = D_i \frac{P_{0i}}{K_i} \sin \omega_i t \quad (\text{b})$$

式中

$$K_i = \omega_i^2 M_i, \quad P_{0i} = \phi_i^T [10 \quad 10 \quad 5]^T \text{ kN}$$

利用前面给出的数据可算得

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.81 \\ 23.8 \\ 495 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}, \quad \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ P_{03} \end{bmatrix} = \Phi^T \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ -7.77 \\ 4.00 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

以及各个正则坐标对应的脉冲长度与周期之比

$$\begin{bmatrix} \frac{t_1}{T_1} \\ \frac{t_2}{T_2} \\ \frac{t_3}{T_3} \end{bmatrix} = \frac{0.02}{2\pi} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.046 \\ 0.099 \\ 0.147 \end{bmatrix}$$

利用这些比值, 从图2-22可查得各振动型动力放大系数

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.39 \\ 0.57 \end{bmatrix}$$

将这些数据代入(b)式, 得到

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.685 \sin 14.5t \\ -0.128 \sin 31.1t \\ 4.60 \times 10^{-3} \sin 46.1t \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

因为每一个振型的最后一个分量都是1.0, 所以顶层的位移 $x_3(t)$ 仅是(c)式各个正则坐标表达式的总和。然而对于其他各层, 例如第二层, 就必须把各个正则坐标与相应振型分量相乘, 进行叠加。因此

$$x_2(t) = \sum \phi_{2i} y_i(t) = 0.444 \sin 14.5t + 0.077 \sin 31.1t - 0.012 \sin 46.1t \quad (\text{d})$$

同样, 在脉冲作用下结构中产生的弹性力由(3-85)式给出。对于这个集中质量体系, 第二层的弹性力为

$$f_{s_2} = \sum m_2 \phi_{2i} \omega_i^2 y_i(t) \approx 1.40 \sin 14.5t + 1.12 \sin 31.1t - 0.383 \sin 46.1t \quad (\text{e})$$

比较式(e)和(d), 很明显高阶振型对于弹性力反应所引起的作用要比对于位移反应的作用大得多。

习 题

3-1 建立图T3-1所示弹簧质量体系的运动方程。

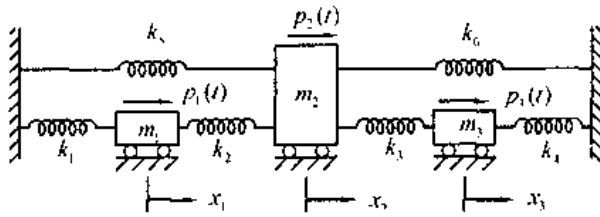


图 T3-1

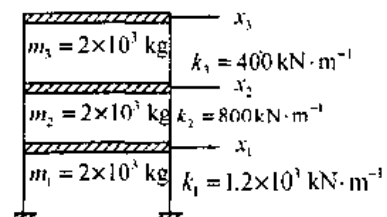


图 T3-2

3-2 图T3-2示出了三层剪切型建筑物的理想化模型, 其所有质量都集中在刚性横梁和地基上, 利用图中给定质量和刚度特性, 写出该结构的质量矩阵和刚度矩阵。

3-3 已知平面均匀梁单元的弹性模量为 E , 抗弯刚度为 EI , 横截面积为 A , 单位长度上的质量为 \bar{m} , 所取自由度如图T3-3所示, 计算单元的刚度矩阵和一致质量矩阵(可利用例3-2及例3-3的结果)。

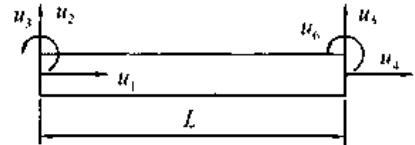


图 T3-3

3-4 采用埃尔米特多项式[(3-28)式]作为形状函数, 用(3-31)式计算抗弯刚度为 $EI(x) = EI_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)$ 的梁单元的刚度系数 k_{23} 。

3-5 利用(3-32)式计算分布质量 $m(x) = \bar{m} \left(1 + \frac{x}{L}\right)$ 的梁单元的一致质量矩阵系数 m_{23} 。假定采用(3-28)式的形状函数, 将梁等分为四段, 用辛普森法计算积分。

3-6 图T3-6所示平面框架由等截面杆组成, 各杆特性如图示。利用单元刚度矩阵(3-29)式, 集合指定三个自由度对应的结构刚度矩阵。

3-7 利用(3-30)式给出的单元质量矩阵, 集合习题3-6结构的质量矩阵。

3-8 利用(3-20)式计算图T3-6所示各单元的等效节点荷载, 然后集合出指定三个自由度所对应的荷载向量。

3-9 与图T3-2所示结构外形相同但构件长度和物理特性不同的平面框架, 其刚度矩阵和集中质量矩阵如下

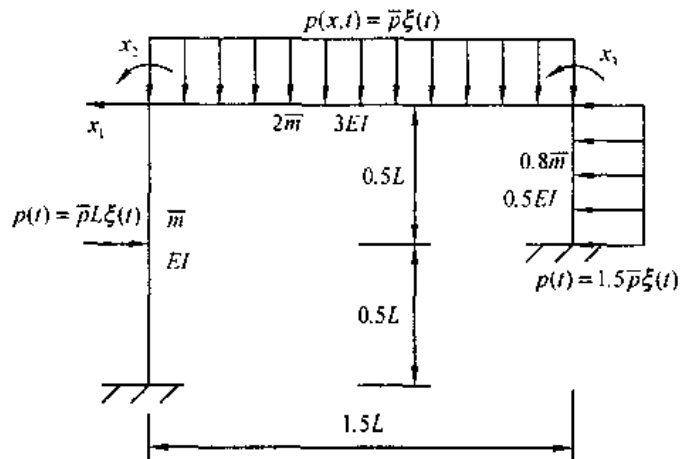


图 T3-6

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 20 & -10L & -5L \\ -10L & 15L^2 & 8L^2 \\ -5L & 8L^2 & 12L^2 \end{bmatrix}, \quad m = \bar{m}L \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ① 用静力凝聚计算凝聚掉两个转动自由度后的刚度矩阵;
- ② 写出凝聚后无阻尼单自由度体系的特征方程。

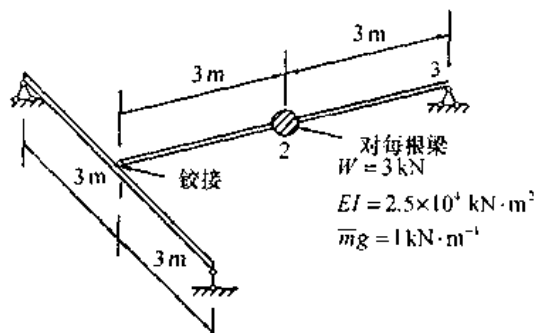


图 T3-12

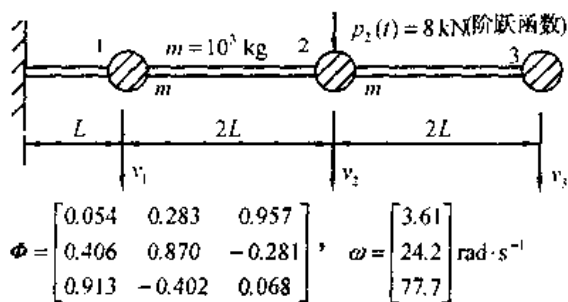


图 T3-13

3-10 一座三层剪切型建筑物，其特性如图T3-2所示。

- ① 解行列式方程，求无阻尼结构的振动频率；
- ② 取顶层振幅为1，计算三个振型；
- ③ 验算所得振型满足(3-56)式给出的正交条件；
- ④ 将所得振型进行正交规格化，并用式(3-59)来验算规格化后的振型。

3-11 如果图T3-2的建筑物改为， $m_1 = 3 \times 10^3 \text{ kg}$ ， $m_2 = 2 \times 10^3 \text{ kg}$ ， $m_3 = 2 \times 10^3 \text{ kg}$ ， $k_1 = k_2 = k_3 = 800 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ，重算习题3-10的几个问题。

3-12 两根相同的等截面梁支承着一个重量为3 kN的设备，其布置如图T3-12的透视图所示。图中给出了梁的抗弯刚度和每米长的重量。将结构简化为图示两个自由度的体系。

假定每根梁分布质量的 $\frac{1}{2}$ 集中于它的中点， $\frac{1}{4}$ 集中于端点，计算结构的两个频率和振型。

提示：中点作用集中荷载 p 的等截面简支梁中点的挠度是 $\frac{pL^3}{48EI}$ 。用(3-49)式求解。

3-13 图T3-13所示悬臂梁支承三个相等的集中质量，已算得结构的无阻尼振动频率和振型矩阵。在质量2上施加一个8 kN的阶跃荷载(即在 $t=0$ 时刻突然施加8 kN的力并永久保留在结构上)，写出质量3的位移反应表达式。画出在时段 $0 < t < T_1$ 内反应 $x_3(t)$ 的时程曲线。

3-14 在图T3-13所示结构中，假定在质量2上施加荷载改为 $p_2(t) = 3 \sin \bar{\omega} t \text{ kN}$ ，其中 $\bar{\omega} = 0.75 \omega_1$ 。

- ① 假定无阻尼，写出质量1的稳态反应表达式；
- ② 求在最大反应时刻所有质量的位移值，并画出该时刻的挠曲形状。

3-15 假定结构各振型的阻尼比为10%，重算习题3-14的①。

3-16 在图T3-16中给出了一座三层剪切型建筑物的物理特性，假定已算得

$$\Phi^T = \begin{bmatrix} 0.198 & -0.872 & 12.1 \\ 0.548 & -1.52 & -6.26 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} 11.6 \\ 27.5 \\ 45.9 \end{bmatrix} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

设楼面的初位移 $x_1 = 0.3 \text{ cm}$ ， $x_2 = -0.8 \text{ cm}$ ， $x_3 = 0.3 \text{ cm}$ ，然后在 $t=0$ 时刻突然释放形成自由振动。确定 $t = \frac{2\pi}{\omega}$ 时刻的位移形状。

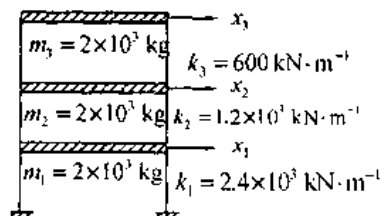


图 T3-16

- ① 假定无阻尼；
- ② 假定每一振型的阻尼比都是10%。

第4章 离散结构动力学方程的逐次积分法

上一章我们对多自由度体系振动作了讨论,主要讨论了如何建立集中质量离散体系的运动方程,重点讨论了如何用有限元法将分布参数体系简化为离散体系,并建立其运动方程;在此基础上,我们对多自由度体系的自振特性计算及体系在动力荷载作用下的瞬态反应计算作了介绍;最后就振型叠加法这一很有用的方法进行了较深入的讨论。

本章对多自由度体系振动将作更深入的讨论,首先将介绍离散结构动力学方程的逐次积分的数值方法。这种方法在工程上极为有用,因为它既可以对承受任何动力荷载的多自由度的线性体系(包括阻尼耦合体系)加以求解,还可以对非线性结构(此时已不能采用叠加原理)承受复杂荷载情况进行求解。

4.1 增量的平衡方程

4.1.1 逐次积分法的引入

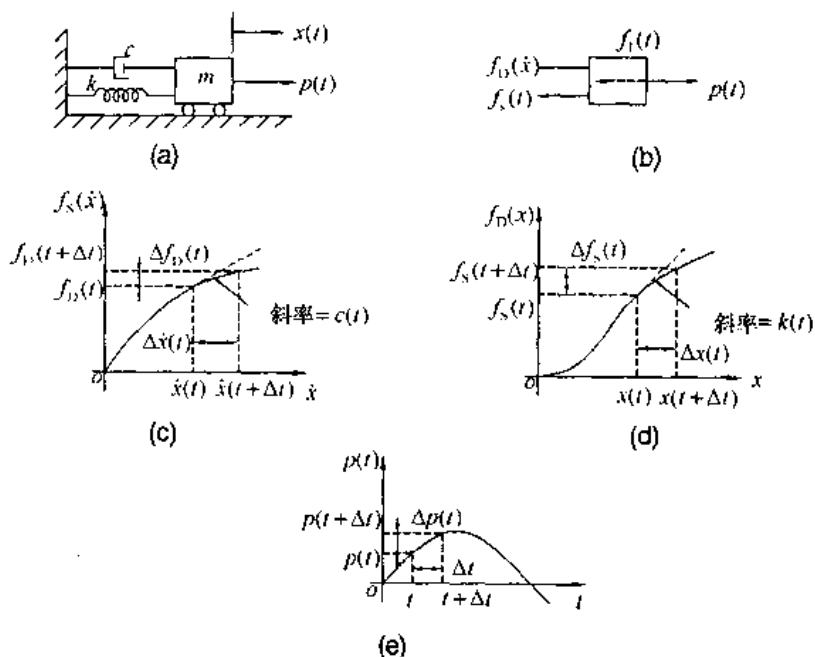
前面讨论的多自由度体系振动都是假定体系为线性的,因此可以先计算结构的振型和频率,然后采用振型叠加原理计算结构的反应。这样带来的好处是无论体系有多少自由度,常常只需考虑前几个振型就能对动力反应进行恰当的估计,因此可减少很多计算工作量。然而,在许多情况下,结构的物理特性并不能始终保持不变。刚度系数可以随材料的屈服或结构构件中轴向力的明显改变(它将引起几何刚度系数的改变)而变化。在动力反应过程中,质量系数或阻尼系数也许会发生变化。任何这样的改变都将改变体系的振动特性,实际上简单的自由振动的概念不再适用于这样的非线性体系,因此无法再用正则坐标对运动方程解耦。

分析任意的非线性体系唯一普遍适用的方法,是对耦联的运动方程进行数值积分。这种积分(通常称为直接积分或逐次积分)是在一系列短时间增量 Δt 中计算反应,而通常为了计算方便起见,取 Δt 为等步长,在每个时间间隔的起点和终点建立动力平衡条件。对每一时段按照线性体系计算结构的反应,这个线性体系的特性取自时段开始时刻所限定的体系特性,而时段结束时的特性要根据那时体系的变形和应力状态来修正。这样,非线性分析就近似为一系列依次变化的线性体系的分析。

以下将介绍的逐次积分法也适用于线性结构。有时用直接积分法比用振型叠加法更胜一筹,这是因为在自由度很多的体系中计算振型和频率的工作量非常大,而直接积分法不要求振型和频率。一般认为,在计算受短时间脉冲荷载作用的大型复杂结构的反应时,逐次积分法更显示其优越性,因为这种荷载可能会激起许多个振型而只需要计算一段很短的反应时程。

4.1.2 增量平衡方程

在本节讨论中,我们首先考虑图4-1(a)所示的单自由度体系,体系的特性 m , k , c 和 $p(t)$ 可以理解为2.4节中所讨论的广义量,而并不只局限于图上所示的简单情况。作用于体系质量 m 上的力如图4-1(b)所示,弹簧力和阻尼力的一般非线性性质分别绘于图4-1(c)和(d)中,任意作用荷载则绘于图4-1(e)中。



(a) 单自由度结构 (b) 力的平衡 (c) 非线性阻尼 (d) 非线性刚度 (e) 作用荷载

图 4-1 非线性动力体系的定义

在任意瞬间 t , 作用于质量 m 上的力系的平衡要求为

$$f_1(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (4-1a)$$

而在很短的时间 Δt 以后, 方程将为

$$f_1(t + \Delta t) + f_D(t + \Delta t) + f_S(t + \Delta t) = p(t + \Delta t) \quad (4-1b)$$

由方程(4-1b)减去方程(4-1a)则可得时间间隔 Δt 的运动方程的增量形式

$$\Delta f_1(t) + \Delta f_D(t) + \Delta f_S(t) = \Delta p(t) \quad (4-2)$$

这个方程中的增量力可表示如下

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_1(t) &= f_1(t + \Delta t) - f_1(t) = m\Delta\ddot{x} \\ \Delta f_D(t) &= f_D(t + \Delta t) - f_D(t) = c(t)\Delta\dot{x} \\ \Delta f_S(t) &= f_S(t + \Delta t) - f_S(t) = k(t)\Delta x \\ \Delta p(t) &= p(t + \Delta t) - p(t) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

其中, 质量 m 通常被假设为常量, 而 $c(t)$ 和 $k(t)$ 项则表示在时间间隔 Δt 内速度和位移相应的阻尼和刚度特性, 它们分别如图4-1(c)和(d)中 Δt 内相应曲线的割线所示。但是由于这些特性依赖于时间增量 Δt 末端的速度和位移, 故所示割线斜率只能用迭代法逐次逼近。

因此,通常可用时间间隔起点所定义的切线斜率来代替

$$c(t) = \left(\frac{df_D}{d\dot{x}} \right)_t, \quad k(t) = \left(\frac{df_S}{dx} \right)_t \quad (4-4)$$

将方程(4-3)代入方程(4-2),可得时间 t 的增量平衡方程的最终形式为

$$m\Delta\ddot{x} + c(t)\Delta\dot{x} + k(t)\Delta x = \Delta p(t) \quad (4-5)$$

在这种类型的分析中,所讨论的材料特性可包括任何的非线性形式。因此,没有必要规定弹簧力 f_S 像非线性弹性材料那样仅仅依赖于位移。这同样也可以很好地说明非线性滞变材料。在这种材料中,力依赖于变形的过去时程以及位移的当前值,唯一的要求是刚度特性必须完全由变形的过去和目前状态所确定。此外,隐含的质量不变的假定显然是可以改动的,质量也可以表示为时间变化的量。

对多自由度体系,在时间增量 Δt 时段内的力增量平衡方程可仿照单自由度体系增量方程推导过程写出矩阵形式的方程。因此取 t 和 $t + \Delta t$ 时刻所确定的平衡关系式之间的差就得到增量平衡方程

$$\Delta f_1(t) + \Delta f_D(t) + \Delta f_S(t) = \Delta p(t) \quad (4-6)$$

类似于单自由度体系的表达式(4-3)式,这个方程中力的增量可表达为

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_1(t) &= f_1(t + \Delta t) - f_1(t) = m\Delta\ddot{x} \\ \Delta f_D(t) &= f_D(t + \Delta t) - f_D(t) = c(t)\Delta\dot{x} \\ \Delta f_S(t) &= f_S(t + \Delta t) - f_S(t) = k(t)\Delta x \\ \Delta p(t) &= p(t + \Delta t) - p(t) \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

这里假定质量矩阵 m 是不随时间变化的。

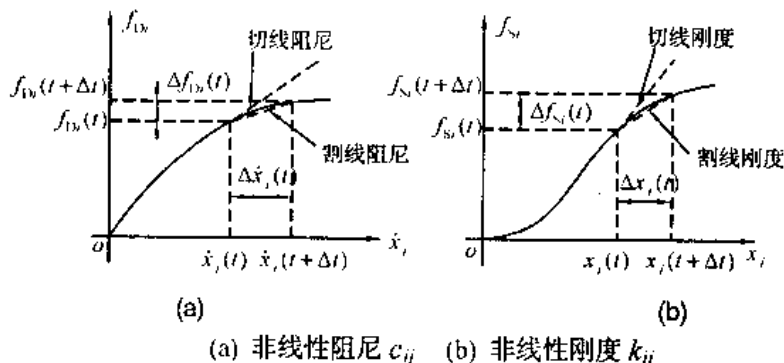


图 4-2 多自由度体系中非线性影响系数的定义

增量方程中的阻尼矩阵 $c(t)$ 和刚度矩阵 $k(t)$ 中的元素是由时间增量过程确定的影响系数 $c_{ij}(t)$ 和 $k_{ij}(t)$,在图4-2中给出了这些系数的典型表示。像解释单自由度体系一样,为了在求解的每一步中避免迭代,不用割线而用起点的切线斜率来度量阻尼或刚度特性,由此给出的影响系数为

$$c_{ij}(t) = \left(\frac{df_{D_i}}{d\dot{x}_j} \right)_t, \quad k_{ij}(t) = \left(\frac{df_{S_i}}{dx_j} \right)_t \quad (4-8)$$

将(4-7)式代入(4-6)式,可得以下形式的增量运动方程

$$m\Delta\ddot{x} + c(t)\Delta\dot{x} + k(t)\Delta x = \Delta p(t) \quad (4-9)$$

因为 $c(t)$ 和 $k(t)$ 的各元素均采用了起点的切线斜率值, 所以(4-9)式左边的力增量表达式只是近似的。

4.2 中心差分法

为了求解形式如(4-9)式那样的增量矩阵运动方程, 通常可采用数值积分方法。数值积分方法可分为逐次积分法和逐次微分法。其中逐次积分法求解动力反应又可分为有限差分法和直接积分法。有限差分法的特点是用位移近似地表似加速度和速度, 从而将动力方程在时间域上离散, 并化为对时间的差分格式, 而在空间域内仍采用空间有限元离散。在理论上有大量的有限差分格式可采用, 而实际上仅有少数几个差分格式对求解动力方程才是有效的。在这种问题的求解中, 一种很有效的方法就是中心差分法。

4.2.1 中心差分法的基本公式

假定在 $t=0$ 时的位移 x_0 、速度 \dot{x}_0 、加速度 \ddot{x}_0 均为已知, 再将求解的时间区间划分为 n 个等份, 即 $\Delta t = \frac{t}{n}$ 。我们要建立的积分格式就是从已知的 $t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 的解来计算下一时间步的解。

在中心差分法中, 是按中心差分法将速度和加速度矢量离散为

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2\Delta t} (x_{i+\Delta t} - x_{i-\Delta t}) \quad (4-10)$$

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (x_{i+\Delta t} - 2x_i + x_{i-\Delta t}) \quad (4-11)$$

考虑在 t 时刻的动力方程, 有

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = p(t) \quad (4-12)$$

将(4-10)和(4-11)式代入(4-12)式中, 得到

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right) x_{i+\Delta t} = p_i - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2} \right) x_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) x_{i-\Delta t} \quad (4-13)$$

这样, (4-12)式就可化为相邻时刻的位移表示的代数方程, 由此可解出 $x_{i+\Delta t}$ 。又由于它是利用 t 时刻的平衡条件解得 $x_{i+\Delta t}$, 所以这种积分又称为显式积分方法。我们注意到, 在求解 $x_{i+\Delta t}$ 时, 需要用到 x_i 和 $x_{i-\Delta t}$ 。于是, 在计算开始时, 即 $t=0$ 时, 要计算 $x_{-\Delta t}$ 的值, 而它是未知的, 因此, 必须有一个起动的处理。显然, 这种算法不是自行起步的。由于 x_0 , \dot{x}_0 和 \ddot{x}_0 均为已知, 所以利用(4-10)和(4-11)式, 并令 $t=0$ 可解得

$$x_{-\Delta t} = x_0 - \dot{x}_0 \Delta t + 0.5 \ddot{x}_0 \Delta t^2 \quad (4-14)$$

4.2.2 中心差分法的计算步骤

1) 初始计算

- ① 形成刚度矩阵 k , 质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c ;
- ② 给定初始条件 x_0 , \dot{x}_0 , \ddot{x}_0 ;

- ③ 选择时间步长 Δt ，且 $\Delta t < \Delta t_{cr}$ (临界最大值，见下讨论)，并计算积分常数

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t}, \quad a_2 = 2a_0, \quad a_3 = \frac{1}{a_2}$$

- ④ 计算 $x_{-\Delta t} = x_0 - \Delta t \dot{x}_0 + a_3 \ddot{x}_0$;
 ⑤ 形成有效质量矩阵 \tilde{m} ， $\tilde{m} = a_0 m + a_1 c$;
 ⑥ 对 \tilde{m} 作三角分解， $\tilde{m} = LDL^T$ 。

2) 对每一个时间步进行计算

- ① 计算时刻 t 的有效荷载

$$\tilde{p}_t = p_t - (k - a_2 m)x_t - (a_0 m - a_1 c)x_{t-\Delta t}$$

- ② 求解 $t + \Delta t$ 时刻的位移

$$LDL^T x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_t \quad (4-15)$$

- ③ 如果需要，求出 t 时刻的加速度和速度

$$\ddot{x}_t = a_0 (x_{t-\Delta t} - 2x_t + x_{t+\Delta t}) \quad (4-15a)$$

$$\dot{x}_t = a_1 (-x_{t-\Delta t} + x_{t+\Delta t})$$

应当指出，在中心差分算法中，(4-15)式左端的系数矩阵只与质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c 有关，而与刚度矩阵 k 无关。如果质量矩阵和阻尼矩阵是对角阵，那么在解方程时，就不需要对系数矩阵进行三角分解，即不需要解线性代数方程组，而从第一步开始逐步直接求解各个时刻 $x_{t+\Delta t}$ 的值。这时中心差分格式就是一种显式的格式。此外，由于不求解代数方程组，也就不需要进行组集；它的右端的形成也只需在单元一级水平上，由每个单元对有效荷载矢量的贡献叠加而成。因此，在某些结构通用程序(如ADINA)中规定，在使用中心差分法时，必须使用对角的质量矩阵和阻尼矩阵。

4.2.3 中心差分法的特点

使用中心差分法的优点在于，当 m 和 c 为对角阵的情况时可不必要计算出全部单元的组合格度和质量矩阵，只是在单元量级上求解动力方程，它只需要较小的高速存储器。如果相邻单元的刚度和质量矩阵相同，只需要从备用的存储器中计算或读取相应的一系列矩阵中的第一个矩阵，这种方法就变得更加有效。

中心差分法的不足在于，它的有效程度取决于所使用的对角质量矩阵和所选择的通常与速度有关的阻尼力。如果仅仅包含对角的阻尼质量矩阵，在单元量级上进行求解的好处是很明显的。在实际运用中，采用的对角质量矩阵通常是不精确的，因此解的精度由充分地进行有限单元离散化来保证。在中心差分使用原理中，应考虑的重要一点是它的时间步长 Δt 应小于临界值 Δt_{cr} 。 Δt_{cr} 可由所有单元组合的质量和刚度性质计算得到

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (4-16)$$

在上式中， T_n 是有限单元的组合格度最小周期， n 是单元系统的阶数。周期 T_n 可用求解特征值问题的任一方法求得。中心差分法是条件稳定的。如果使用的时间步长大于 Δt_{cr} ，积分将不稳定，就是说在这时由于数值积分的误差或计算机上的舍入误差的增长，使得绝大

多数情况下计算变得无意义。

4.2.4 例题

例4-1 图3-18所示体系的运动方程为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

通过求解这个体系自由振动的特征值的问题, 已求得自由振动的周期 $T_1 = 4.45$, $T_2 = 2.80$ 。使用中心差分方法计算, 分别以其时间步长① $\Delta t = \frac{1}{10}T_2$, ② $\Delta t = 10T_2$, 并假定 $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, 试计算这个系统在前12个时间步长的反应。

【解】 第一步, 用方程(a)计算零时刻的 \ddot{x}_0 , 即令

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{x}_0 + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

因此

$$\ddot{x}_0 = [0 \quad 10]^T$$

考虑情况①, 即 $\Delta t = 0.28$, 可以计算出系数

$$a_0 = \frac{1}{(0.28)^2} = 12.76, \quad a_1 = \frac{0.5}{0.28} = 1.79,$$

$$a_2 = 2a_0 = 25.5, \quad a_3 = \frac{1}{a_2} = 0.0392$$

因此,

$$x_{-N} = 0 - 0.28 \times 0 + 0.0392 [0 \quad 10]^T = [0 \quad 0.392]^T$$

$$\bar{m} = 12.8 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1.79 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.5 & 0 \\ 0 & 12.8 \end{bmatrix}$$

在 t 时刻的有效荷载是

$$\tilde{p}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 45.0 & 2 \\ 2 & 21.5 \end{bmatrix} x_t - \begin{bmatrix} 25.5 & 0 \\ 0 & 12.8 \end{bmatrix} x_{t-N}$$

因此, 可得求解每一个时间步长的方程:

$$\begin{bmatrix} 25.5 & 0 \\ 0 & 12.8 \end{bmatrix} x_{t+N} = \tilde{p}_t \quad (\text{b})$$

对于每一个步长, 计算(b)的解, 结果见表4-1。

表 4-1 中心差分法的计算结果 ($\Delta t = 0.28$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	0.000	0.031	0.166	0.483	1.02	1.68	2.36	2.85	2.98	2.66	1.91	0.907
x	0.389	1.44	2.81	4.09	4.92	5.11	4.71	3.95	3.15	2.59	2.40	2.52

对于情况②, 即 $\Delta t = 28$, 用同样方法可求得

$$x_{N'} = [0 \quad 3.89 \times 10^3]^T, \quad x_{2N'} = [3.05 \times 10^6 \quad -1.2 \times 10^7]^T$$

以上计算的位移是连续的。由于时间步长 Δt 大约是 T_1 的6倍和 T_2 的10倍, 在数值计算中远

不能达到精度的要求。特别应注意的是所计算的结果是增加还是减少，它关系到积分是否是稳定的。在这个例子中，计算结果是增加的，这说明对时间的积分是不稳定的。正如前面已指出，对于稳定性来说，在积分中使用中心差分法时，时间步长 Δt 不能大于 Δt_{cr} ，此处 $\Delta t_{cr} = \frac{T_2}{\pi}$ 。上述情况②的时间步长远大于 Δt_{cr} ，因此所计算的反应的增量是无界的。这是一种特定的失稳现象。后面还可以看到，使用无条件稳定的豪鲍尔特法、威尔逊- θ 法和纽马克等各种方法，在 $\Delta t = 28$ 时所产生的反应也很不精确，但不是增加的。

4.3 豪鲍尔特(Houbolt)法

4.3.1 豪鲍尔特法的基本公式

豪鲍尔特法也是一种差分法，只是这种差分格式是利用 $t + \Delta t$ ， t ， $t - \Delta t$ 和 $t - 2\Delta t$ 四个时刻上位移的三次插值多项式建立起来的，即假定

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2x_{t+\Delta t} - 5x_t + 4x_{t-\Delta t} - x_{t-2\Delta t}) \quad (4-17)$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11x_{t+\Delta t} - 18x_t + 9x_{t-\Delta t} - 2x_{t-2\Delta t}) \quad (4-18)$$

且认为 $x_{t-\Delta t}$ ， $x_{t-2\Delta t}$ 和 x_t 均为已知，而 $x_{t+\Delta t}$ 为未知的，则 $t + \Delta t$ 时刻的动力方程为

$$m\ddot{x}_{t+\Delta t} + c\dot{x}_{t+\Delta t} + kx_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t} \quad (4-19)$$

将(4-17)式和(4-18)式代入(4-19)式中，并进行整理，就得到求解 $x_{t+\Delta t}$ 时刻的方程

$$\left(\frac{2}{\Delta t^2} m + \frac{11}{6\Delta t} c + k \right) x_{t+\Delta t} = \left(\frac{5}{\Delta t^2} m + \frac{3}{\Delta t} c \right) x_t - \left(\frac{4}{\Delta t^2} m + \frac{3}{2\Delta t} c \right) x_{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{\Delta t^2} m + \frac{1}{3\Delta t} c \right) x_{t-2\Delta t} + p_{t+\Delta t} \quad (4-20)$$

在(4-20)式中，为求得 $x_{t+\Delta t}$ 的解，需要事先知 x_t ， $x_{t-\Delta t}$ 和 $x_{t-2\Delta t}$ ，因此，尚需利用类似于中心差分法中的起动处理方法。在求得 $x_{\Delta t}$ ， $\dot{x}_{\Delta t}$ 和 $\ddot{x}_{\Delta t}$ 后，可利用(4-17)式和(4-18)式并令 $t=0$ ，可得

$$\ddot{x}_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2x_{\Delta t} - 5x_0 + 4x_{-\Delta t} - x_{-2\Delta t})$$

$$\dot{x}_{\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11x_{\Delta t} - 18x_0 + 9x_{-\Delta t} - 2x_{-2\Delta t})$$

由此可求得 $x_{-\Delta t}$ 和 $x_{-2\Delta t}$ 。这样，利用 $x_{-\Delta t}$ ， x_0 和 $x_{\Delta t}$ 就可由 Δt 开始用(4-20)式求 $x_{2\Delta t}$ ，再代入(4-17)和(4-18)式，即可求得 $\dot{x}_{2\Delta t}$ 和 $\ddot{x}_{2\Delta t}$ 。如此逐步求下去即可求得任意时刻的动力响应。

4.3.2 豪鲍尔特法的计算步骤

1) 初始计算

① 形成刚度矩阵 k ，质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c ；

- ② 给定初始条件 x_0 , \dot{x}_0 和 \ddot{x}_0 ;
 ③ 选择时间步长 Δt , 并计算积分常数

$$a_0 = \frac{2}{\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{11}{6\Delta t}, \quad a_2 = \frac{5}{\Delta t^2}, \quad a_3 = \frac{3}{\Delta t},$$

$$a_4 = -2a_0, \quad a_5 = -\frac{1}{2}a_1, \quad a_6 = \frac{1}{2}a_0, \quad a_7 = \frac{1}{9}a_3$$

- ③ 使用特定的自起步方法计算 $x_{\Delta t}$, $\dot{x}_{\Delta t}$ 和 $\ddot{x}_{\Delta t}$;
 ④ 形成有效刚度矩阵 \tilde{k} , $\tilde{k} = k + a_0 m + a_1 c$;
 ⑤ 对 \tilde{k} 作三角分解, $\tilde{k} = LDL^T$ 。

2) 对每一个时间步进行计算

- ① 计算时刻的有效荷载

$$\tilde{p}_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t} + m(a_2 x_t + a_4 x_{t-\Delta t} + a_6 x_{t-2\Delta t}) + c(a_3 x_t + a_5 x_{t-\Delta t} + a_7 x_{t-2\Delta t})$$

- ② 求解 $t + \Delta t$ 时刻的位移

$$\tilde{k} x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t}$$

- ③ 如果需要, 计算 $t + \Delta t$ 时刻的加速度和速度

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = a_0 x_{t+\Delta t} - a_2 x_t - a_4 x_{t-\Delta t} - a_6 x_{t-2\Delta t}$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = a_1 x_{t+\Delta t} - a_3 x_t - a_5 x_{t-\Delta t} - a_7 x_{t-2\Delta t}$$

4.3.3 豪鲍尔特法的特点

豪鲍尔特法和中心差分法的基本差别在于豪鲍尔特法的刚度矩阵 k 是作为所求位移向量 $x_{t+\Delta t}$ 的因子出现的。因为(4-18)式是考虑了在 $t + \Delta t$ 时刻的平衡, 而不像中心差分法是考虑在 t 时刻的平衡, 因而出现了 $kx_{t+\Delta t}$ 项。由于这个原因, 豪鲍尔特积分方法是隐式积分方法, 而中心差分方法则是显式积分方法。豪鲍尔特方法所采用的时间步长不受临界时间步长极限的限制, 通常 Δt 选择比中心差分法中(4-16)式给定的时间步长要大得多。此法对线性动力问题是无条件稳定的。

豪鲍尔特的逐次求解方法的另一个显著特点, 就是在质量和阻尼的影响被略去的条件下, 可以直接简化为静力分析, 但中心差分方法则不能。换句话说, 如 $c = 0$, $m = 0$, 豪鲍尔特方法可得到与时间无关荷载的静力解。

4.3.4 例题

例4-2 利用豪鲍尔特法求解例4-1所给的简单体系的反应, 分别取 $\Delta t = 0.28$ 和 $\Delta t = 28$ 进行计算。

[解] ①考虑 $\Delta t = 0.28$ 的情况, 按照上述的解题步骤求出积分常数

$$a_0 = 25.5, \quad a_1 = 6.55, \quad a_2 = 63.8, \quad a_3 = 10.7,$$

$$a_4 = -51.0, \quad a_5 = -5.36, \quad a_6 = 12.8, \quad a_7 = 1.19$$

开始积分前必须求得 $x_{-\Delta t}$ 和 $x_{-2\Delta t}$ ，为了方便，这里直接引用前节中心差分法例4-1中的计算结果中的前两步(亦可通过对初始条件作启动处理得到)，而从 $x_{\Delta t}$ 开始计算，即

$$x_0 = [0 \quad 0]^T, \quad x_{\Delta t} = [0 \quad 0.389]^T, \quad x_{2\Delta t} = [0.0305 \quad 1.44]^T$$

求有效刚度矩阵和有效荷载矩阵。

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 25.5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 & -2 \\ -2 & 29.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + (63.8x_t - 51.0x_{t-\Delta t} + 12.8x_{t-2\Delta t}) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取12个时间步长，求解 $\tilde{k}x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t}$ ，计算结果见表4-2。

表4-2 豪鲍尔特法计算结果($\Delta t = 0.28$)

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移	0.000	0.031	0.166	0.460	0.922	1.51	2.12	2.64	2.93	2.92	2.57	1.94
x	0.389	1.44	2.78	4.07	5.02	5.47	5.39	4.90	4.20	3.47	2.89	2.55

②讨论时间步长扩大100倍，即 $\Delta t = 28$ 的情况，观察豪鲍尔特法的无条件稳定性。开始的积分使用前例 Δt 和 $2\Delta t$ 时刻的精确反应，即

$$x_{\Delta t} = [2.19 \quad 2.24]^T, \quad x_{2\Delta t} = [2.92 \quad 3.12]^T$$

求取 \tilde{k}

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0.00255 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0051 & -2.000 \\ -2.000 & 4.00255 \end{bmatrix}$$

把 \tilde{k} 和 k 比较， \tilde{k} 几乎和 k 相等。从

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

解出 $[x_{1s} \quad x_{2s}]^T$ ，计算时应该注意体系的静力位移为

$$x_{st} = [1.0 \quad 3.0]^T$$

对应于12个时间步长位移的反应，见表4-3。

表4-3 豪鲍尔特法计算结果($\Delta t = 28$)

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移	2.19	2.92	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
x	2.24	3.12	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00

从上表看出，位移的反应迅速地趋于静力的解。

4.4 威尔逊- θ 法

4.4.1 线性加速度假设

威尔逊- θ 法是线性加速度法的推广。所谓的线性加速度法就是假定在时刻 t 到时刻

$t + \Delta t$ 的时间间隔(或称时间步长)内, 加速度向量(以下简称加速度)按线性关系增长(或衰减)。实际上加速度随时间变化的规律是复杂的, 在一个时间步长间隔内对加速度进行某种假设和限制, 只是数学上的一种简化处理手段。因此, 线性加速度法只是一种近似的方法。显然, 如时间步长取得足够小, 就能达到一定的计算精度。有了这种假设, 就能相应地确定该时间步长内速度和位移的变化规律(速度向量呈二次变化, 位移向量呈三次变化), 进而求解整个系统的动力反应。众所周知, 对加速度的变化规律, 计算实践上还可以作出其他各种不同的近似假设, 威尔逊- θ 法将其处理成线性变化只是许多假设中较简化的一种。

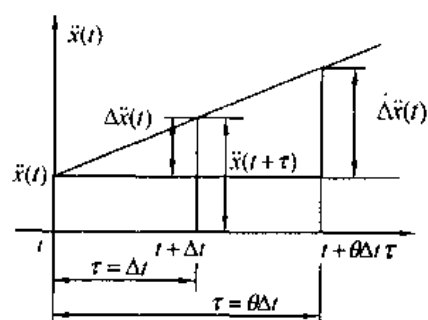


图 4-3 威尔逊- θ 法示意图

标准的线性加速度逐次积分法, 只有当其时间步长间隔 Δt 小于某一临界值时, 它的解才是收敛的。如不对其进一步处理, 方法只是有条件的稳定, 这样使用上就要受限制。实际上, 计算中较广泛应用的是对标准加速度逐次积分再加改进后的威尔逊- θ 法(见图4-3)。

标准的线性加速度法假定在时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$ 的时间间隔 Δt 内, 加速度是按线性变化的。而威尔逊- θ 法是假定这种线性变化的时间间隔即步长取得更大些, 也即认为在时刻 t 到时刻 $t + \theta\Delta t$ 的时间步长内其加速度变化都是线性的, 其中 θ 取值不小于 1.37, 时间间隔 Δt 的大小可由精度要求控制而不受收敛条件的限制, 因而它是无条件稳定的。实践证明, 在满足计算稳定的前提下, θ 值不宜选的太大, 一般取 $\theta = 1.4$ 。

4.4.2 威尔逊- θ 法的求解公式

以 τ 表示时间增量, 其中 $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$; 在 t 到 $t + \theta\Delta t$ 时间间隔内, 假定

$$\ddot{x}_{t+\tau} = \ddot{x}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t) \quad (4-21)$$

对上式进行一次积分, 得

$$\dot{x}_{t+\tau} = \dot{x}_t + \ddot{x}_t\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t) \quad (4-22)$$

再积分一次

$$x_{t+\tau} = x_t + \dot{x}_t\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}_t\tau^2 + \frac{1}{6\theta\Delta t}\tau^3(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t) \quad (4-23)$$

令 $\tau = \theta\Delta t$ 并代入(4-22)式及(4-23)式, 可以得到用 $t + \theta\Delta t$ 时刻的加速度 $\ddot{x}_{t+\theta\Delta t}$ 及 t 时刻的 x_t , \dot{x}_t 和 \ddot{x}_t 表示的 $t + \theta\Delta t$ 时刻的速度和位移, 即

$$\dot{x}_{t+\theta\Delta t} = \dot{x}_t + 0.5\theta\Delta t(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{x}_t) \quad (4-24)$$

$$x_{t+\theta\Delta t} = x_t + \theta\Delta t\dot{x}_t + \frac{1}{6}\theta^2\Delta t^2(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{x}_t) \quad (4-25)$$

前述动力平衡方程式中包含了位移、速度和加速度。为了求解方便, 必须只保留其中一项, 而消去其他二项。这里, 将加速度和速度用位移表示, 从而方程只含有位移项。将(4-25)式变化, 可得关系式

$$\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}_t - 2\ddot{x}_t \quad (4-26)$$

将(4-26)式代入(4-24)式得

$$\dot{x}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta \Delta t} (x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - 2\dot{x}_t - \frac{1}{2}\theta \Delta t \ddot{x}_t \quad (4-27)$$

为了求取在 $t + \theta\Delta t$ 时刻的位移、速度和加速度的解，先考虑在 $t + \theta\Delta t$ 时刻的运动平衡方程。因为加速度是线性变化的，将 t 时刻的荷载和 $t + \Delta t$ 时刻的荷载线性外插，可得到 $t + \theta\Delta t$ 时刻的荷载向量 $\tilde{p}_{t+\theta\Delta t}$ 。这样，在 $t + \theta\Delta t$ 时刻的动力方程为

$$m\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + c\dot{x}_{t+\theta\Delta t} + kx_{t+\theta\Delta t} = p_{t+\theta\Delta t} \quad (4-28)$$

式中

$$p_{t+\theta\Delta t} = p_t + \theta(p_{t+\Delta t} - p_t)$$

将(4-26)和(4-27)式代入(4-28)式，可得到方程

$$\left(k + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} m + \frac{3}{\theta \Delta t} c \right) x_{t+\theta\Delta t} = p_t + \theta(p_{t+\Delta t} - p_t) + c \left(\frac{3}{\theta \Delta t} x_t + 2\dot{x}_t + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{x}_t \right) + m \left(\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} x_t + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}_t + 2\ddot{x}_t \right) \quad (4-29)$$

上式可简写为

$$\tilde{k}x_{t+\theta\Delta t} = \tilde{p}_{t+\theta\Delta t} \quad (4-30)$$

其中

$$\tilde{k} = k + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} m + \frac{3}{\theta \Delta t} c$$

$$\tilde{p}_{t+\theta\Delta t} = p_t + \theta(p_{t+\Delta t} - p_t) + m \left(\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} x_t + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}_t + 2\ddot{x}_t \right) + c \left(\frac{3}{\theta \Delta t} x_t + 2\dot{x}_t + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{x}_t \right)$$

求解方程(4-30)，则得到 $x_{t+\theta\Delta t}$ ，将 $x_{t+\theta\Delta t}$ 代入式(4-26)中，就得到 $\ddot{x}_{t+\theta\Delta t}$ 。如在(4-21)式中，取 $\tau = \Delta t$ ，并将(4-26)式代入，有

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}_t + \left(1 - \frac{3}{\theta} \right) \ddot{x}_t \quad (4-31)$$

将(4-26)式代入(4-22)和(4-23)式中，取 $\tau = \Delta t$ ，则有

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}_{t+\Delta t} + \ddot{x}_t) \quad (4-32)$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{x}_{t+\Delta t} + 2\ddot{x}_t) \quad (4-33)$$

4.4.3 威尔逊- θ 法的计算步骤

1) 初始计算

- ① 形成刚度矩阵 k ，质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c ；
- ② 给定初始条件 x_0 ， \dot{x}_0 和 \ddot{x}_0 ；
- ③ 选择时间步长 Δt ，取常数 $\theta = 1.4$ ，并计算积分常数

$$a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}, \quad a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}, \quad a_2 = 2a_1, \quad a_3 = \frac{1}{2}\theta\Delta t, \quad a_4 = \frac{a_0}{\theta},$$

$$a_5 = -\frac{a_2}{\theta}, \quad a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}, \quad a_7 = 0.5\Delta t, \quad a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$

④ 形成有效刚度矩阵 \tilde{k} , $\tilde{k} = k + a_0 m + a_1 c$;

⑤ 对 \tilde{k} 作三角分解, $\tilde{k} = LDL^T$ 。

2) 对每一个时间步进行计算

① 计算 $t + \theta\Delta t$ 时刻的有效荷载

$$\tilde{p}_{t+\theta\Delta t} = p_t + \theta(p_{t+\Delta t} - p_t) + m(a_0 x_t + a_2 \dot{x}_t + 2\ddot{x}_t) + c(a_1 x_t + 2\dot{x}_t + a_3 \ddot{x}_t)$$

② 求解 $t + \theta\Delta t$ 时刻的位移

$$LDL^T x_{t+\theta\Delta t} = \tilde{p}_{t+\theta\Delta t}$$

③ 计算 $t + \Delta t$ 时刻的加速度、速度和位移

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = a_4(x_{t+\theta\Delta t} - x_t) + a_5 \dot{x}_t + a_6 \ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + a_7(\ddot{x}_{t+\Delta t} + \ddot{x}_t)$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + a_8(\ddot{x}_{t+\Delta t} + 2\ddot{x}_t)$$

刚度矩阵 k 是未知位移向量 $x_{t+\theta\Delta t}$ 的系数矩阵, 用的是 $t + \theta\Delta t$ 时刻的平衡条件, 所以威尔逊- θ 法是一种隐式的积分法。这种方法不需要特定的开始方法, 原因在于 $t + \Delta t$ 时刻的位移、速度和加速度可以用 t 时刻的相同的量来表示。

4.4.4 例题

例4-3 使用威尔逊- θ 法计算例4-1系统的反应, $\theta = 1.4$ 。

[解] ① 考虑 $\Delta t = 0.28$ 的情况, 按照前面的计算步骤有

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \ddot{x}_0 = [0 \quad 10]^T$$

\ddot{x}_0 在例4-1中已求得。这里

$$a_0 = 39.0, \quad a_1 = 7.65, \quad a_2 = 15.3, \quad a_3 = 0.196, \quad a_4 = 27.9$$

$$a_5 = -10.9, \quad a_6 = -1.14, \quad a_7 = 0.14, \quad a_8 = 0.0131$$

而

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 39.0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84.1 & -2 \\ -2 & 43.0 \end{bmatrix}$$

对于每个时间步长, 必须算出:

$$\tilde{p}_{t+\theta\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (39.0 x_t + 15.3 \dot{x}_t + 2\ddot{x}_t)$$

由

$$\tilde{k} x_{t+\theta\Delta t} = \tilde{p}_{t+\theta\Delta t}$$

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = 27.9(x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - 10.9\dot{x}_t - 1.14\ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + 0.14(\ddot{x}_{t+\Delta t} + \ddot{x}_t)$$

$$x_{i+\Delta t} = x_i + \Delta t \dot{x}_i + 0.0131(\ddot{x}_{i+\Delta t} + 2\ddot{x}_i)$$

可先求出 $x_{i+\theta\Delta t}$ ，进而计算出 $\ddot{x}_{i+\Delta t}$ ， $\dot{x}_{i+\Delta t}$ 和 $x_{i+\Delta t}$ 。最终的位移计算结果见表4-4。

表4-4 威尔逊- θ 法计算结果($\Delta t = 0.28$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	0.006	0.053	0.196	0.490	0.952	1.54	2.16	2.67	2.92	2.82	2.33	1.54
x	0.366	1.34	2.64	3.92	4.88	5.31	5.18	4.61	3.82	3.06	2.52	2.29

②考虑 $\Delta t = 28$ 的情况，有

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0.00392 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.00784 & -2 \\ -2 & 4.00392 \end{bmatrix}$$

比较 \tilde{k} 与 k 可见二者非常接近，这和豪鲍尔特方法相似。最终的位移计算结果见表4-5。

表4-5 威尔逊- θ 法计算结果($\Delta t = 28$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	1.09	2.83	-2.61	5.79	-4.30	6.30	-3.97	5.46	-2.89	4.31	1.77	3.29
x	1130	-830	655	-490	372	-272	207	-148	115	-80.0	64.5	-42.5

在此应注意到加速度的初始条件，即

$$\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$$

引起了初始的位移反应。这种反应随时间的增加而减少。如果 $\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$ ，所计算出的位移反应见表4-6。

表4-6 威尔逊- θ 法计算结果($\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	0.364	1.45	0.635	1.28	0.795	1.15	0.891	1.08	0.943	1.04	0.970	1.02
x	1.09	4.34	1.90	3.85	2.36	3.47	2.65	3.26	2.81	3.14	2.90	3.08

由表4-6可见，其计算结果趋近于静力解。

4.5 纽马克(Newmark)法

4.5.1 纽马克法的基本假定和计算公式

纽马克在1959年提出了一种逐次积分格式，故称这种积分格式为纽马克方法。这种方法采用的基本假定是

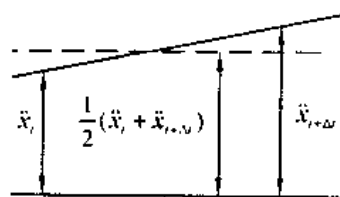


图4-4 纽马克的常加速度法

$$\dot{x}_{i+\Delta t} = \dot{x}_i + [(1-\delta)\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_{i+\Delta t}]\Delta t \quad (4-34)$$

$$x_{i+\Delta t} = x_i + \dot{x}_i\Delta t + [(0.5-\alpha)\ddot{x}_i + \alpha\ddot{x}_{i+\Delta t}]\Delta t^2 \quad (4-35)$$

式中， α 和 δ 是按积分的精度和稳定性要求可以调整的参数。当 $\delta = 0.5$ ， $\alpha = \frac{1}{6}$ 时，(4-34)式和(4-35)式与线性加速度法一致(即 $\theta = 1$ 时的威尔逊- θ 法)。纽马克方法是作为一

种无条件稳定的方法提出的。若假定 $\delta = 0.5$, $\alpha = 0.25$, 实际上就是常加速度法(见图4-4)

常加速度法是应用较广的逐次积分法之一。研究表明, 当 $\delta \geq 0.5$, $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$ 时, 纽马克法是无条件稳定的。

为了求解在 $t + \Delta t$ 时刻位移、速度和加速度的解, 可考虑 $t + \Delta t$ 时刻的平衡方程

$$m\ddot{x}_{t+\Delta t} + c\dot{x}_{t+\Delta t} + kx_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t} \quad (4-36)$$

由(4-35)式可解出用 $x_{t+\Delta t}$ 等项表示的 $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ 。若把 $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ 代入(4-34)式就得到仅由未知位移 $x_{t+\Delta t}$ 表示的 $\dot{x}_{t+\Delta t}$, 即有

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(x_{t+\Delta t} - x_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{x}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{x}_t \quad (4-37)$$

和

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}(x_{t+\Delta t} - x_t) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\dot{x}_t + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right)\Delta t\ddot{x}_t \quad (4-38)$$

将(4-37)式和(4-38)式代入(4-36)式, 就得到关于 $x_{t+\Delta t}$ 的平衡方程

$$\tilde{k}x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t} \quad (4-39)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}m + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}c \\ \tilde{p}_{t+\Delta t} &= p_{t+\Delta t} + m\left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}x_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{x}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{x}_t\right] + \\ &\quad c\left[\frac{\delta}{\alpha\Delta t}x_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right)\dot{x}_t + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right)\Delta t\ddot{x}_t\right] \end{aligned}$$

求解(4-39)式, 就可得到 $x_{t+\Delta t}$, 然后根据(4-37)式和(4-34)式可求得 $\dot{x}_{t+\Delta t}$ 和 $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ 。

因为纽马克法和威尔逊- θ 法计算程序方法相近, 这就为我们提供了在一个简单的程序中方便地使用两种积分方法的可能。

4.5.2 纽马克法的计算步骤

1) 初始计算

- ① 形成刚度矩阵 k , 质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c ;
- ② 给定初始条件 x_0 , \dot{x}_0 和 \ddot{x}_0 ;
- ③ 选择时间步长 Δt 以及参数 δ ($\delta \geq 0.50$) 和 α ($\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$), 并计算积分常数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right), \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \delta\Delta t \end{aligned}$$

- ④ 形成有效刚度矩阵 \tilde{k} , $\tilde{k} = k + a_0m + a_1c$;
- ⑤ 把 \tilde{k} 作三角分解, $\tilde{k} = LDL^T$ 。

2) 对每一个时间步进行计算

① 计算 $t + \Delta t$ 时刻的有效荷载

$$\tilde{p}_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t} + m(a_0 x_t + a_2 \dot{x}_t + a_3 \ddot{x}_t) + c(a_1 x_t + a_4 \dot{x}_t + a_5 \ddot{x}_t)$$

② 求解 $t + \Delta t$ 时刻的位移

$$LDL^T x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t}$$

③ 计算 $t + \Delta t$ 时刻的加速度和速度

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = a_0 (x_{t+\Delta t} - x_t) - a_2 \dot{x}_t - a_3 \ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + a_6 \ddot{x}_t + a_7 \ddot{x}_{t+\Delta t}$$

4.5.3 例题

例4-4 用纽马克方法计算例4-1给出的系统的动力反应, 取 $\alpha = 0.25$, $\delta = 0.5$ 。

[解] ① 考虑 $\Delta t = 0.28$ 情况, 按上面的计算步骤, 则有

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \ddot{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}^T;$$

积分常数为

$$a_0 \approx 51.0, \quad a_1 = 7.14, \quad a_2 = 14.3, \quad a_3 = 1.00,$$

$$a_4 = 1.00, \quad a_5 = 0.00, \quad a_6 = 0.14, \quad a_7 = 0.14$$

而有效刚度矩阵

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 51.0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & -2 \\ -2 & 55 \end{bmatrix}$$

对于每一时间步长, 必须计算

$$\tilde{p}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (51.0 x_t + 14.3 \dot{x}_t + 1.00 \ddot{x}_t)$$

由

$$\tilde{k} x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t}$$

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = 51.0 (x_{t+\Delta t} - x_t) - 14.3 \dot{x}_t - 1.00 \ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + 0.14 \ddot{x}_t + 0.14 \ddot{x}_{t+\Delta t}$$

可计算出对应于12个步长的位移反应, 其结果见表4-7。

表4-7 纽马克法计算结果 ($\Delta t = 0.28$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	0.007	0.050	0.189	0.484	0.958	1.57	2.21	2.72	2.94	2.76	2.18	1.28
x	0.364	1.35	2.68	3.98	4.92	5.28	5.05	4.38	3.54	2.80	2.35	2.24

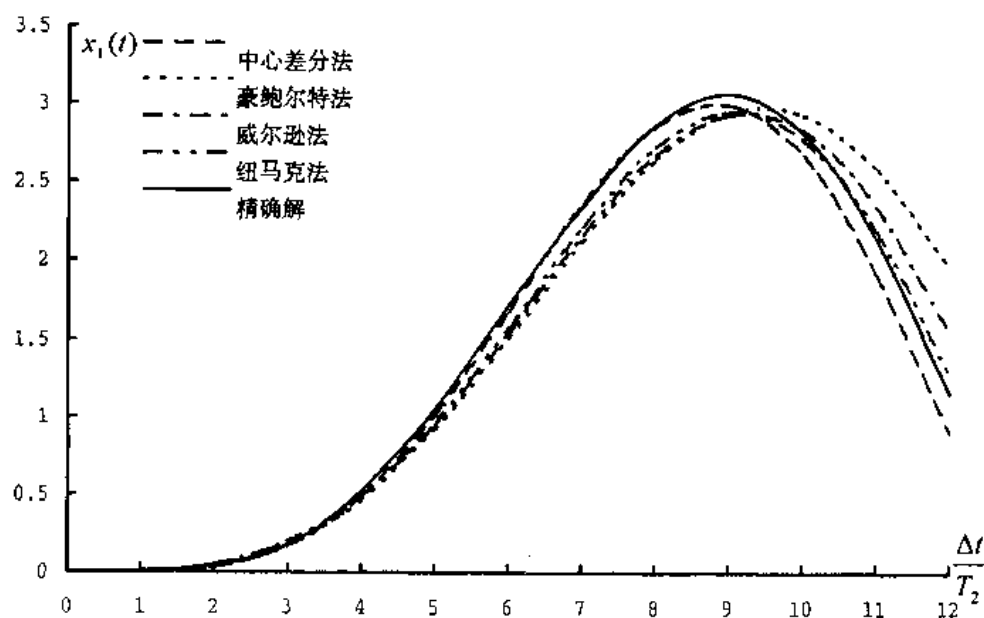
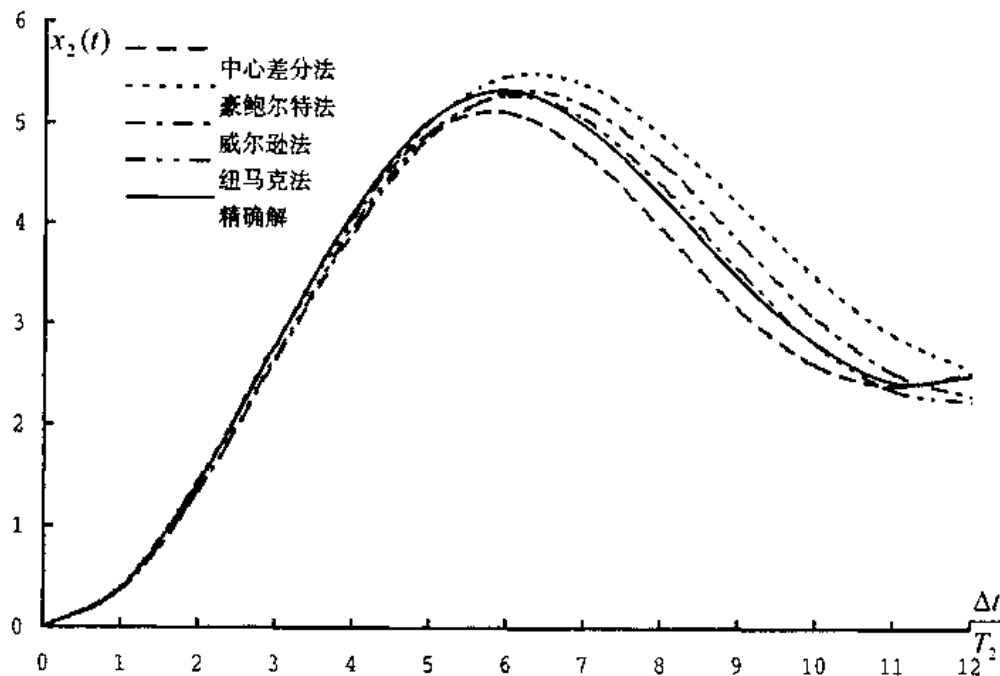
② 考虑时间步长 $\Delta t = 28$, 在此情况下有

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 5.10 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.01 & -2.00 \\ -2.00 & 4.01 \end{bmatrix}$$

因此, 正如在使用豪鲍尔特法和威尔逊- θ 方法积分时一样, \tilde{k} 接近于 k 。如果使用初始条件, $\ddot{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}^T$, 位移反应的计算结果见表4-8。

表4-8 纽马克法计算结果($\Delta t = 28$, $\ddot{x}_0 = [0 \ 10]^T$)

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移	1.99	0.028	1.94	0.113	1.83	0.249	1.67	0.431	1.46	0.651	1.23	0.900
x	5.99	0.045	5.90	0.178	5.72	0.394	5.47	0.687	5.14	1.05	4.75	1.46

图4-5 不同积分方法对 x_1 计算结果的比较图4-6 不同积分方法对 x_2 的计算结果的比较

如果改变初始条件使 $\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$, 位移反应的计算结果见表4-9。

表4-9 纽马克法计算结果($\Delta t = 28$, $\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$)

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移 x	0.996	1.01	0.982	1.02	0.969	1.04	0.957	1.05	0.947	1.06	0.939	1.06
	2.99	3.02	2.97	3.04	2.95	3.06	2.93	3.08	2.91	3.09	2.90	3.11

由此可见, 计算结果也趋近于静力解。

在例4-1至例4-4中, 分别使用了中心差分法、豪鲍尔特法、威尔逊- θ 法和纽马克法计算了简单的两个自由度系统的动力反应。把这四种方法计算出的结果绘于图4-5和图4-6中并进行比较, 虽然对于稳定性和精度说来, 这些数值积分法所选择的时间步长 Δt 相对较大, 但是数值积分计算的结果能很好的近似于用振型叠加法分析得出的该系统的精确的反应。其中, 按振型叠加法(精确解)计算同一个例题的过程可参考第3章例3-8。

除以上介绍的方法以外, 在某些文献和专著中还介绍了龙格-库塔法(Runge-kutta法)、傅里叶法(Fourier法)、欧拉-高斯法(Euler-Gauss法)以及米尔拉斯法等计算方法。

4.6 数值积分法的稳定性和计算精度

采用数值积分法求解动力方程的关键在于如何选择合适的时间步长, 使在较短的时间内, 花费代价最少以得出与实际结构体系动力反应相近似的解。因此需要进一步讨论这种积分法的稳定性和计算精度问题。

4.6.1 计算精度和稳定性的概念

计算精度是指数值解与精确的连续解之间的误差程度。稳定性是指对任意时间步长所得的解是否会因初始条件或计算过程的舍入误差的扩散而导致解的无限增长或振荡的性质。计算的稳定实际上意味着在任一时刻的位移、速度和加速度由于计算机上的舍入的缘故, 在后续的逐次积分计算中, 误差不致持续增长和放大, 从而使数值解能够迅速收敛于一个稳定的值。总之, 稳定性是指误差的积累是否能得到控制的问题。稳定性并不能保证精度, 反之亦然。

数值积分法的稳定性和精度与所假定的阻尼的性质、承受的荷载以及时间步长的大小等因素有关, 因此在数值积分法中选择一个适当的时间步长是非常重要的。通常, 如果时间步长足够的小, 包括高阶振型在内的各阶振型都能精确的积分, 那么解的精确度和稳定性就可以得到保证。但是如果时间步长取得过小, 则必然要花费很大的计算代价, 这也是不划算的。如果对于任意的初始条件和任意的时间步长, 即在特定情况下虽然 $\frac{\Delta t}{T}$ 比较大, 而数值积分法的解也不致于无限地增长, 则这种积分方法称为无条件稳定的; 若数值积分方法的解只有在 $\frac{\Delta t}{T}$ 小于一个被称为稳定极限的特定值的条件下才能得到控制, 则这种积分方法仅是条件稳定的。

为了便于讨论精度和稳定性的问题, 可先对运动方程和解的形式进行变换和整理。

4.6.2 运动方程变换和解的形式改进

利用振型的正交性并引入广义坐标的概念, 可以把运动方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p$$

化为 n 个非耦合的方程

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{P_i^*(t)}{M^*}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4-40)$$

上式可以用杜哈梅尔积分方法(The Duhamel Integral)求解, 也可以用前面讨论过的任何一种数值积分法求解。因为周期 $T_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是已知的, $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ 对于(4-40)式中每一个独立方

程使用一个适当的时间步长进行数值积分。如果(4-40)式使用相同的时间步长 Δt 积分, 这样振型迭加的分析将完全等效于使用相同的积分方法和时间步长 Δt 进行直接数值积分方法的分析。换句话说, 使用任何一种方法得到有限元平衡方程的解都是相同的。因此, 为了研究直接数值积分法的精度, 应把注意力从运动方程转到用相同的时间步长按(4-40)式方程的积分。采用这种方法, 在数值积分方法的精度和稳定性分析中的变量仅是 Δt , ω_i 和 $\xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 而不是刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵中的那些所有元素。进一步说, 因为(4-40)式中 n 个方程都是类似的, 现仅需要研究方程(4-40)中任一行的积分, 如第 i 行

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = p_i(t) \quad (4-41)$$

(4-41)式就是自由振动周期为 T_i , 阻尼比为 ξ_i , 施加荷载为 p_i 的单自由度运动平衡方程。经过上述变换, 在分析中需考虑的变量就减少了。根据数值积分方法解的性质, 把(4-40)式中求解的误差可以估计为变量 $\frac{\Delta t}{T}$, ξ_i 和 p_i 的函数。

下面将进一步建立求取积分近似解的递推形式解的表达式。

假定已得到了在离散时刻 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 等时刻所需要的解, 而 $t + \Delta t$ 时刻是下一步需要的解, 那么对一个特定的所考虑的积分方法, 都可以建立下面的递推关系式

$$\tilde{y}_{t+\Delta t} = A\tilde{y}_t + LP_{t+r} \quad (4-42)$$

式中, $\tilde{y}_{t+\Delta t}$ 和 \tilde{y}_t 是包含由(4-42)式求解的各个量(即位移, 速度和加速度), P_{t+r} 是 $t+r$ 时的荷载。在所考虑的积分方法中, r 可分别取作 $0, \Delta t$ 或 $\theta\Delta t$ 。而 A 和 L 分别是积分逼近算子矩阵和荷载算子向量。(4-42)式中的每一个量都取决于所采取的积分方法。

注意到(4-42)式可以经过逐次循环得到任意 $t + n\Delta t$ 时刻的解

$$\tilde{y}_{t+n\Delta t} = A^n \tilde{y}_t + A^{n-1}LP_{t+r} + A^{n-2}LP_{t+\Delta t+r} + \dots + ALP_{t+(n-2)\Delta t+r} + LP_{t+(n-1)\Delta t+r} \quad (4-43)$$

(4-43)式可用来作为研究积分方法的稳定性和精度的关系式, 下面对不同的积分方法, 导出算子矩阵 A 和算子向量 L 。

4.6.3 算子矩阵 A 和算子向量 L 的推导

在中心差分法中, 可用相应公式分别表示时刻 t 的近似的加速度和速度。时刻 t 的非耦

合方程为

$$\ddot{y}_t + 2\xi\omega\dot{y}_t + \omega^2 y_t = P_t \quad (4-44)$$

$$\dot{y}_t = \frac{1}{2\Delta t}(-y_{t-\Delta t} + y_{t+\Delta t}) \quad (4-45)$$

$$\ddot{y}_t = \frac{1}{\Delta t^2}(y_{t-\Delta t} - 2y_t + y_{t+\Delta t}) \quad (4-46)$$

其中, (4-45)式和(4-46)式即分别为(4-10)式和(4-11)式。

把(4-46)式和(4-45)式代入(4-44)式, 求解 $y_{t+\Delta t}$, 即

$$y_{t+\Delta t} = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} y_t - \frac{1 - \xi\omega\Delta t}{1 + \xi\omega\Delta t} y_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} P_t \quad (4-47)$$

可把(4-47)式的解写成(4-42)式的形式,

$$\begin{bmatrix} y_{t+\Delta t} \\ y_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-\Delta t} \end{bmatrix} + L P_t \quad (4-48)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} & -\frac{1 - \xi\omega\Delta t}{1 + \xi\omega\Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-49)$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4-50)$$

同理, 对豪鲍尔特法、威尔逊- θ 法和纽马克法, 可用相同的方法得到它们相应的算子矩阵 A 及算子向量 L 。

豪鲍尔特法

$$\beta = \left(\frac{2}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{11\xi}{3\omega\Delta t} + 1 \right)^{-1}, \quad k = \frac{\xi\beta}{\omega\Delta t}$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{\omega^2 \Delta t^2} + 6k & -\left(\frac{4\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + 3k \right) & \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{2k}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

威尔逊- θ 法

$$\beta = \left(\frac{\theta}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{\xi\theta^2}{\omega\Delta t} + \frac{\theta^3}{6} \right)^{-1}, \quad k = \frac{\xi\beta}{\omega\Delta t}$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t} & \frac{\beta}{2\omega^2 \Delta t} & \frac{\beta}{6\omega^2} \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta\theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} - k\theta & \frac{1}{\Delta t}(-\beta\theta - 2k) & -\frac{\beta}{\Delta t^2} \\ \Delta t \left(1 - \frac{1}{2\theta} - \frac{\beta\theta^2}{6} - \frac{k\theta}{2} \right) & 1 - \frac{\beta\theta}{2} - k & -\frac{\beta}{2\Delta t} \\ \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta} - \frac{\beta\theta^2}{18} - \frac{k\theta}{6} \right) & \Delta t \left(1 - \frac{\beta\theta}{6} - \frac{k}{3} \right) & 1 - \frac{\beta}{6} \end{bmatrix}$$

纽马克法

$$\beta = \left(\frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\delta}{\omega\Delta t} \right)^{-1}, \quad k = \frac{\xi\beta}{\omega\Delta t}$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega\Delta t^2} & \frac{\beta\delta}{\omega^2\Delta t} & \frac{\alpha\beta}{\omega^2} \end{bmatrix}^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\beta - 2(1-\delta)k & \frac{1}{\Delta t}(-\beta - 2k) & -\frac{\beta}{\Delta t^2} \\ \Delta t \left[1 - \delta - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\delta\beta - 2(1-\delta)\delta k \right] & 1 - \beta\delta - 2\delta k & -\frac{\beta\delta}{\Delta t} \\ \Delta t^2 \left[\frac{1}{2} - \alpha - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\alpha\beta - 2(1-\delta)\alpha k \right] & \Delta t(1 - \alpha\beta - 2\alpha k) & 1 - \alpha\beta \end{bmatrix}$$

4.6.4 稳定性分析

运动稳定性就是指积分格式在任意时间步长所得的解是否会由于初始条件及计算过程的舍入误差的扩散而导致无限的增长或振荡问题。

由上述定义可知,数值积分方法的稳定性可通过对任意初始条件数值解的特性分析得到。

设 $\dot{y}_0 = [\dot{y}_0 \quad \dot{y}_{-\Delta t}]^T$ 为精确的初值条件, $\bar{y}_0 = [\bar{y}_0 \quad \bar{y}_{-\Delta t}]^T$ 为近似的初值条件, 则其误差为 $\delta = \dot{y}_0 - \bar{y}_0$ (即扰动)。在经过若干个相同的时间步长以后, 由公式(4-43)得

$$\begin{aligned} \dot{y}_{n\Delta t} &= A^n \dot{y}_0 + A^{n-1}LP_0 + A^{n-2}LP_{\Delta t} + \cdots + ALP_{(n-2)\Delta t} + LP_{(n-1)\Delta t} \\ \bar{y}_{n\Delta t} &= A^n \bar{y}_0 + A^{n-1}LP_0 + A^{n-2}LP_{\Delta t} + \cdots + ALP_{(n-2)\Delta t} + LP_{(n-1)\Delta t} \end{aligned}$$

上两式相减得

$$\delta^* = \dot{y}_{n\Delta t} - \bar{y}_{n\Delta t} = A^n(\dot{y}_0 - \bar{y}_0) = A^n\delta \quad (4-51)$$

由此可知

① 数值解法对于任意初始向量都收敛于相同的极限, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $A^n\delta \rightarrow 0$, 从而必须有 $A^n \rightarrow 0$

② 若 $n \rightarrow \infty$, $A^n \rightarrow 0$, 则积分对于初始向量和荷载都收敛于精确解。然而, 在具体计算中, n 不可能趋于无穷。由(4-51)式知, 只要算子矩阵 A 满足一定的条件, δ^* 的大小就可以控制。所以数值方法的稳定性只需要对算子矩阵 A 的特性进行讨论。

由于积分方法的稳定性仅依赖于逼近算子 A 的特征值, 因而可方便地使用上述各种积分方法的 A 来判断该方法的稳定性。令 $\rho(A)$ 为 A 的谱半径, 且定义

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|, \quad (i=1, 2, \dots)$$

可证: $A^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) 的充分必要条件是 A 的谱半径 $\rho(A) \leq 1$ 。此时, 数值方法是稳定的, 而且 $\rho(A)$ 越小, 则收敛速度越快。以下讨论几种积分方法的稳定性。

例4-5 设阻尼比 $\xi = 0$, 试分析中心差分法的计算稳定性。

【解】先计算 $\xi = 0$ 在(4-49)式所给定近似的算子矩阵 A 的谱半径。

由特征方程 $Ax = \lambda x$, 可得

$$\begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x = \lambda x \quad (4-52)$$

(4-52)式的特征值 λ 就是特征多项式 $\rho(\lambda)$ 的根。 $\rho(\lambda)$ 为

$$\rho(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2 - \omega^2 \Delta t^2 - \lambda) + 1 = 0$$

则

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{2}\right)^2 - 1} \quad (4-53)$$

对于稳定性来说, λ_1 和 λ_2 的绝对值必须小于等于1, 也就是矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$ 必须满足条件 $\rho(A) \leq 1$ 。

令 $|\lambda_i| \leq 1$, 求得: $\omega \Delta t \leq 2$ 或 $\pi \Delta t \leq T_n$ 。

图4-7表示各种数值积分方法的 $\rho(A)$ 随 $\frac{\Delta t}{T}$ 的变化关系, 其中 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 。当 $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{\pi}$ 时, 谱半径 $\rho(A)$ 均小于1。因此只有 $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$, $\Delta t_{cr} = \frac{T}{\pi}$ 时, 中心差分法才是稳定的, 所以中心差分法只是条件稳定的。

使用同样的步骤, 对于不同的近似计算的算子可以分析威尔逊- θ 法、纽马克法和豪鲍尔特法的稳定性。假定不存在物理阻尼(即 $\xi = 0$), 图4-7表明了上述几种方法稳定性的特征。可以看出, 这三种方法都是无条件稳定的。在 $\xi > 0$ 并考虑阻尼的情况下, 稳定性的分析将包含一个附加的变量 ξ 。然而, 一般地对小的 ξ 值, 不会改变数值积分方法的整个稳定性。

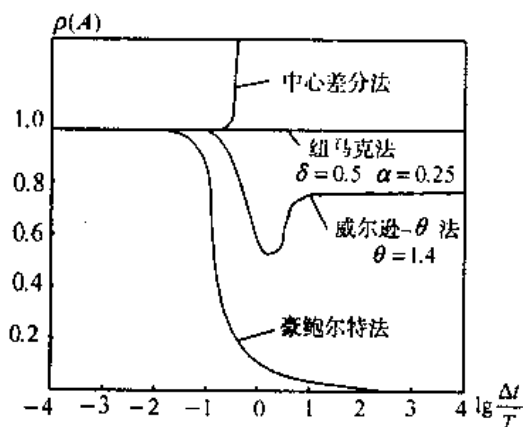


图 4-7 各种数值积分方法的谱半径与时间步长的变化关系

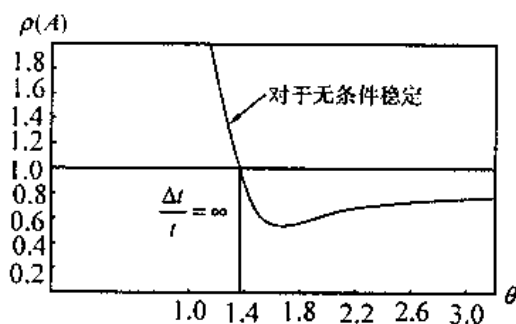


图 4-8 威尔逊- θ 法谱半径与 θ 变化关系

如上述,积分方法稳定性仅取决于所使用的算子矩阵的特征值。但是有时要把算子矩阵的特征值表示出来还是非常麻烦的,通常可以在求矩阵特征值之前先对矩阵 A 进行一些等价变换(有关矩阵变换的方法可参考《线性代数》),这样会使问题方便一些。在纽马克和威尔逊- θ 法中,经过计算可以发现,矩阵 A 的谱半径和积分方法的稳定性仅仅取决于时间比 $\frac{\Delta t}{T}$ 、阻尼比 ξ 和所使用的积分参数。因此,对于给定的 $\frac{\Delta t}{T}$ 和 ξ ,在威尔逊- θ 法和纽马克法中有可能通过变换参数 θ 、 α 和 δ ,以达到一个良好的稳定性和精度。

为了求取威尔逊- θ 法的一个较佳的 θ 值,必须计算作为 θ 函数的算子谱半径 $\rho(A)$ 的变化。如图4-8所示,可以看出 $\theta \geq 1.37$ 时能得到无条件稳定的解。

对于纽马克法,为了得到可靠的稳定性和计算精度,必须变化两个参数 α 和 δ 。只有在 $\delta \leq 0.5$, $\alpha \geq 0.25(\delta + 0.5)^2$ 时,这种方法才是无条件稳定的。从以下关于精度的分析可以得出,这个方法对 $\delta = 0.5$, $\alpha = 0.25$ 有最需要的精度特征。

4.6.5 计算精度分析

解的精度,这里是指用一个积分格式所求得的积分与原微分方程解的误差大小的问题。一般来说,精度与荷载、系统的物理参数(包括刚度,阻尼,质量等)及时间步长的大小有关。对同一系统,在相同的荷载作用下,比较各种算法的精度,就只有时间步长这一个因素了。显然,精度必然以耗费的时间为代价,所以在使用上,要求一种算法具有必要的精度即可。当然,对某一种算法究竟有多大精度必须弄清楚,这也是选择算法的一个重要尺度。下面通过自由振动的例子综述一些解的重要特征。

试分析下述初值问题的解。

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega^2 y &= 0 \\ y_0 &= 1.0, \dot{y}_0 = 0.0, \ddot{y}_0 = -\omega^2 \end{aligned} \quad (4-54)$$

(4-54)式的精确解是 $y = \cos \omega x$, 要进行完整的分析,必须考虑两个问题:①对于精确解 $y = \cos \omega x$ 相应的初始值问题,即 $y_0 = 1.0$, $\dot{y}_0 = 0.0$, $\ddot{y}_0 = -\omega^2$ 。②一般荷载条件下的解。此外还必须表明阻尼参数 ξ 的影响。通常,考虑(4-54)式的数值解,便能论证主要的解的特征。

纽马克法和威尔逊- θ 法可以直接使用(4-54)式的初始值。但在豪鲍尔特法中,启动处理稍麻烦,不妨在下面研究中使用解 $y = \cos \omega x$ 得到 Δt 和 $2\Delta t$ 时精确的位移值,将它们作为计算 $3\Delta t$ 时刻位移值的初始条件。

使用各种不同方法的数值解表明,在积分中的误差能用周期的延长(PE)和振幅的衰减(AD)来测定。图4-9和图4-10已讨论过在隐式积分法中周期延长和振幅衰减的百分比可以看作是 $\frac{\Delta t}{T}$ 的函数。使用计算机求取(4-44)式的值,并把数值解与精确解 $y = \cos \omega x$ 比较,可得到图4-9。应该看到(4-44)式仅仅得出了离散时刻 Δt 部分的解。

图4-9表明在一般情况下,当 $\frac{\Delta t}{T}$ 大约小于0.01时,使用任何一种数值积分方法都是精确的。而当 $\frac{\Delta t}{T}$ 比较大时,各种积分方法显示了不同的特征。

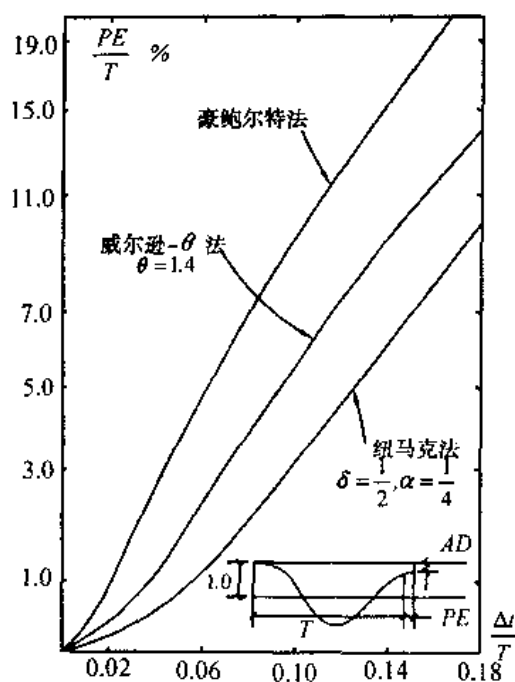


图 4-9

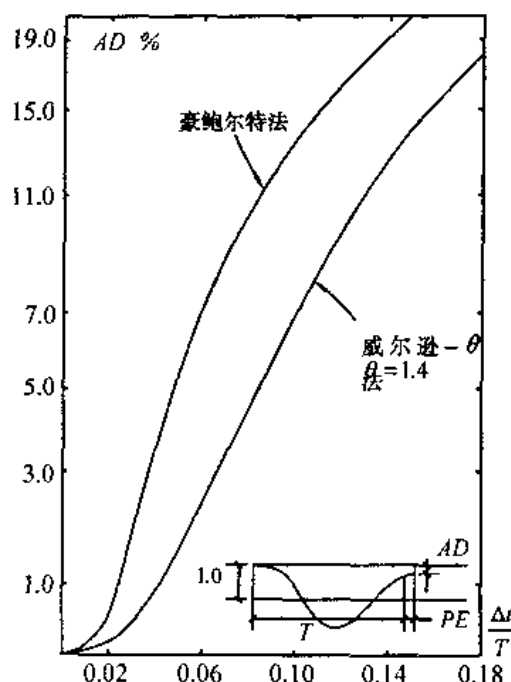


图 4-10

值得注意的是,对给定的 $\frac{\Delta t}{T}$,威尔逊- θ 法($\theta=1.4$)产生的周期延长和振幅的衰减比豪鲍尔特法均小,而纽马克法只引起周期延长而不产生振幅的衰减。

一个重要的问题就是选择一个适当的时间步长。使用中心差分法时,必须使用时间步长 $\Delta t < \Delta t_{cr}$,这表明, Δt 足够小。然而,对无条件稳定方法则时间步长 Δt 可适当的大些,但它仍应足够小以能精确地计算对总的结构反应将起主要贡献的所有振型的反应。

应该指出,本节中对计算稳定性和精度的分析都是在线性有限单元分析的假定上进行的,特别是稳定性的界限只能在线性分析中采用。对于非线性体系的动力反应的稳定性和精度问题,需要作更多考虑,可参阅其他专门文献。

现就上面已介绍的几种基本的数值积分方法作一扼要的评价。

1) 按中心差分法的显式积分

由显式积分的定义可知,中心差分法是从 t 时刻的平衡状态求解 $t + \Delta t$ 时刻的未知的节点位移,而无需分解有效刚度矩阵,包含的误差是 $(\Delta t)^2$ 阶的。将有限差分公式与运动方程联立求解可以直接积分,因而可处理容量很大的有限元体系而无过多的机器内存。另一方面,该算法是条件稳定的,应视结构刚度和质量聚合情况,相对需要较小的时间步长。

2) 按豪鲍尔特法的隐式积分

豪鲍尔特法积分格式是根据速度和加速度的向前向后差分来进行的。从隐式积分的定义可知,考虑 $t + \Delta t$ 时刻的力平衡,可以从计算时刻和过去时刻的位移量值 x_t , $x_{t-\Delta t}$ 和 $x_{t-2\Delta t}$ 求解出 $u_{t+\Delta t}$ 。

与中心差分方法不同,隐式积分的格式需要将有效刚度矩阵作三角分解。这一有限差

分法是无条件稳定的。

3) 按威尔逊外插线性加速度法隐式积分

威尔逊- θ 法设置的时间区间是从 t 到 $t+\theta\Delta t$ ，在此区间内其加速度是线性变化的。当 $\theta \geq 1.37$ ，对线弹性情况而言它是无条件稳定的。在 $t+\theta\Delta t$ 时刻考虑力的平衡，从而 $t+\theta\Delta t$ 时刻的未知位移、速度和加速度均用时刻 t 的相应量值来表示。此法也必须对有效刚度矩阵进行三角分解。

4) 按纽马克广义加速法隐式积分

当选用 $\delta \geq 0.5$ 和 $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$ 时，这一方法在线弹性情况下也是无条件稳定的。

习 题

4-1 用中心差分法计算习题2-23。

4-2 假定上题中的柱子的弹塑性力与位移关系如图T4-2所示，屈服力为35 kN，试解习题4-1。

4-3 用豪鲍尔特法求解习题4-1。

4-4 用豪鲍尔特法求解习题4-2。

4-5 用威尔逊- θ 法求解习题4-1。

4-6 用威尔逊- θ 法求解习题4-2。

4-7 用纽马克法求解习题4-1。

4-8 用纽马克法求解习题4-2。

4-9 已知图T4-9所示体系的质量为 $m_1 = 2.0 \times 10^5 \text{ kg}$ ， $m_2 = 1.0 \times 10^5 \text{ kg}$ ，弹簧刚度为 $k_1 = 4.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$ ， $k_2 = 2.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$ ，设该体系在冲击荷载 $p = [p_1(t) \ p_2(t)]^T = [0 \ 10]^T \text{ kN}$ 作用下，其初始条件为 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 。用中心差分法计算该体系的位移反应，且取

① 时间步长 $\Delta t = 0.2 \text{ s}$ ；

② 时间步长 $\Delta t = 2 \text{ s}$ 。

4-10 用豪鲍尔特法重算习题4-9。

4-11 用威尔逊- θ 法重算习题4-9。

4-12 用纽马克法重算习题4-9。

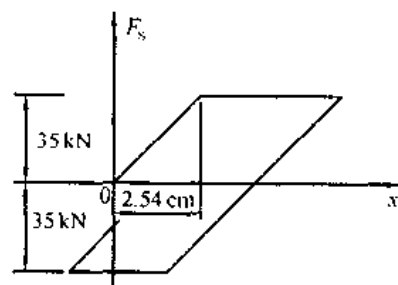


图 T4-2

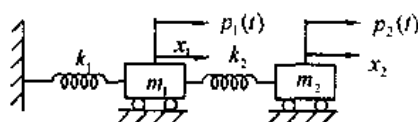


图 T4-9

第5章 多自由度系统特殊情况及变分解法

5.1 多自由度系统的几种特殊情况

前面各章节只讨论了体系的一般情况,即体系的刚度矩阵 k 、质量矩阵 m 均为 $n \times n$ 的实对称正定矩阵,且其特征方程无重根的情况。如果体系不满足以上条件,如矩阵 k 或 m 中其一为半正定阵或者特征方程存在重根,则这类体系则称为特殊的多自由度体系。这类多自由度体系可称为半定系统或退化系统。本章将简要介绍这两种系统的特点、性质以及求解方法。

5.1.1 半定系统的求解

1) 势能和刚度矩阵的符号确定性

众所周知,多自由度线性系统的弹性势能可表示为以刚度矩阵 k 为系数矩阵的位移向量的二次型,即

$$V = \frac{1}{2} x^T k x$$

若弹性势能函数 V 为非负的,且只有当 $x=0$ 才有 $V=0$,则称 V 为正定的;若 V 为非负的,且除了 $x=0$ 之外,在 x 的其他某些取值下也可能有 $V=0$,则称 V 为半正定的。

势能函数 V 的正定性或半正定性显然取决于刚度矩阵 k ,由此引出刚度矩阵本身的符号确定性的概念。我们通常称保证势能函数 V 为正定(或半正定)的刚度矩阵为正定的(或半正定的)。

一个矩阵是否是正定的可以按Sylvester判据加以判定:

一个实对称矩阵 k 为正定的充要条件是它的所有主行列式都是正的;而该矩阵为半正定的充要条件是它为降秩的(即 $\det k = 0$),且一切主行列式都是非负的。

例5-1 试判断以下两个刚度矩阵的符号确定性,其中 $k_1, k_2, k_3 > 0$,且有

$$k_1 = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (b)$$

[解] ① 判别 k_1

$$\det(k_1 + k_2) = k_1 + k_2 > 0$$

$$\det \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 > 0$$

$$\det \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 > 0$$

故刚度矩阵 k_1 是正定的。

② 判别 k_2

$$\det(k_2) = k_2 > 0$$

$$\det \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = k_2 k_3 > 0$$

$$\det \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} = 0$$

故刚度矩阵 k_2 是半正定的。

实际上, 对于二次型函数或实对称矩阵, 除了“正定”与“半正定”两种情况以外, 还有“负定”、“半负定”以及“不定”等情况, 由于后三种不会在振动系数的弹性势能函数中出现, 此处不再详细讨论。

2) 半定系统

若质量矩阵 m 是正定的而刚度矩阵 k 为半正定的系统, 这类系统称为半定系统。由以上讨论可知, 半定系统在位移向量 x 不为零的情况, 弹性势能却可以为零。这表明该系统可作为一刚体进行运动, 而并无弹性变形。

图5-1中(a)、(b)两个系统, 其中(a)图中的系统受到充分的约束, 不存在刚体运动。若去掉其中的弹簧 k_1 , 得(b)图的系统, 该系统作为一个整体并未定位, 因此存在刚体运动, 即三质块均以相同的位移 x_0 运动, 位移向量为

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [x_0 \quad x_0 \quad x_0]^T \neq 0$$

而弹性势能 $V = 0$

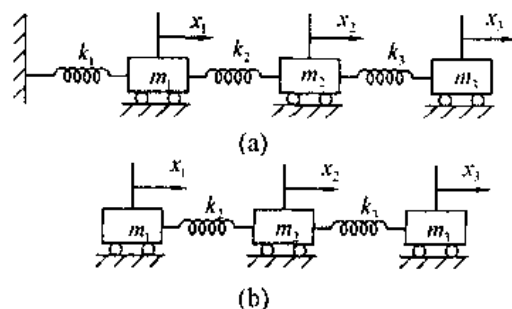
事实上, 此二系统的刚度矩阵分别对应于例5-1中(a)与(b)式, 该例中已判定前者为正定的, 而后者为半正定的。

3) 刚体振型

对半定系统的分析与处理, 不能按以前所介绍的方法, 此处简要介绍对该系统进行分析的专门方法和技巧。

先以图5-1(b)的系统为例, 说明半定系统存在刚体振型。

对(b)图所示的系统, 它的运动一般地可由刚体运动和弹性变形合成。取三质块的水平



(a) 充分约束的系统 (b) 未被充分约束的系统

图 5-1 正定与半定系统

位移 x_1 , x_2 和 x_3 为广义位移, 其组成的位移向量 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ 。

该系统的自振运动方程, 若不考虑阻尼作用, 应为

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (5-1)$$

其中

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

设系统的同步运动为

$$x(t) = \hat{x}e^{i\omega t} \quad (5-2)$$

与此相应的特征值方程为

$$\omega^2 m \hat{x} = k \hat{x} \quad (5-3)$$

可任取代表刚体运动的振型向量 $\hat{x}_0 = x_0 [1 \ 1 \ 1]^T$, 其中 x_0 为不等于零的常数, 此向量反映各质块均以 x_0 作平动, 因而不存在弹性变形。

易证

$$\hat{x}_0^T k \hat{x}_0 = 0 \quad (5-4)$$

$$\hat{x}_0^T m \hat{x}_0 = (m_1 + m_2 + m_3)x_0^2 > 0 \quad (5-5)$$

令(5-3)式中 $\hat{x} = \hat{x}_0$, 并在等式两端左乘 \hat{x}_0^T , 再利用(5-4)式和(5-5)式得

$$\omega^2 \sum_{i=1}^3 m_i = 0$$

上式 $\sum_{i=1}^3 m_i > 0$, 必有 $\omega = 0$ 。这说明与刚体振型相应的自振频率为零, 记为 $\omega_0 = 0$, 因而刚体振型又被称为“零振型”。

因系统的刚体振型 \hat{x}_0 与其他振型 \hat{x} 必定正交, 因而有

$$\hat{x}_0^T m \hat{x} = 0 \quad (5-6)$$

展开后, 可得

$$m_1 \hat{x}_1 + m_2 \hat{x}_2 + m_3 \hat{x}_3 = 0 \quad (5-7)$$

上式两端乘以 $e^{i\omega t}$, 得

$$m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t) + m_3 x_3(t) = 0 \quad (5-8)$$

对 t 求导, 得

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3 = 0 \quad (5-9)$$

(5-9)式表明系统的动量恒等于零, 因此零模态与其他模态正交等价于动量守恒定律。对于以角度为广义坐标的半定系统, 相应的“物理约束”是系统的动量矩守恒定律。利用物理约束(5-8)式, 可排除系统运动中的刚体运动成分, 使 k 不再奇异, 从而求出其他的特征值及特征向量。

4) 弹性振型的计算

仍以图5-1(b)的系统为例加以说明, 而其他半定系统的计算是完全相似的。由(5-8)式

$$x_3 = -\frac{m_1}{m_3} x_1 - \frac{m_2}{m_3} x_2 \quad (5-10)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{m_1}{m_3} & -\frac{m_2}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

记 $x' = [x_1' \ x_2']^T$, 式(5-11)成为

$$x = Bx', \text{ 其中 } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{m_1}{m_3} & -\frac{m_2}{m_3} \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

将上式代入方程(5-1), 并左乘 B^T , 可得

$$m\ddot{x}' + kx' = 0 \quad (5-13)$$

其中

$$m = B^T m B = \frac{1}{m_3} \begin{bmatrix} m_1^2 + m_1 m_3 & m_1 m_2 \\ m_1 m_2 & m_2^2 + m_2 m_3 \end{bmatrix}$$

$$k = B^T k B = \frac{1}{m_3^2} \begin{bmatrix} k_1 m_3^2 + k_2 m_1^2 & -k_1 m_3^2 + k_2 m_1(m_2 + m_3) \\ -k_1 m_3^2 + k_2 m_1(m_2 + m_3) & (k_1 + k_2)m_3^2 + k_2 m_2(2m_3 + m_2) \end{bmatrix}$$

二者都是 2×2 的对称正定矩阵, (5-13)式对应的特征值问题的方程为

$$\omega^2 m \hat{x}' = k \hat{x}' \quad (5-14)$$

由此可解得系统的自振特性为 ω_1 , $[\hat{x}'_{11} \ \hat{x}'_{12}]^T$, ω_2 和 $[\hat{x}'_{21} \ \hat{x}'_{22}]^T$, 其中 x_{ij} 表示 x_i 的第 j 个分量, 然后代回(5-12), 得原坐标下的振型为

$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} \\ \hat{x}_{12} \\ \hat{x}_{13} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \hat{x}'_{11} \\ \hat{x}'_{12} \end{bmatrix} = B \hat{x}'_1$$

$$\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{21} \\ \hat{x}_{22} \\ \hat{x}_{23} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \hat{x}'_{21} \\ \hat{x}'_{22} \end{bmatrix} = B \hat{x}'_2$$

由此求出的 ω_1 和 \hat{x}_1 , ω_2 和 \hat{x}_2 为系统的两个弹性模态, 与前面的刚体模态 ω_0 和 \hat{x}_0 一共有三个自然模态。

5.1.2 退化系统(简并系统)的求解

以前的讨论中假设各特征值各不相等, 则 n 个振型可构成 n 维空间的正交(关于质量矩阵 m 正交, 以下同)坐标基, 这正是振型叠加法等的基础。如果特征根有重根, 则重根对应的特征向量的方向不能唯一确定, 原有的正交关系一般并不适用于这种系统, 通常称具有多个相同特征值的系统为退化系统或简并系统(Regenerate System)。

设退化系统的特征方程为

$$k\hat{x} = \omega^2 m\hat{x}$$

其中 $\omega_1^2 = \omega_2^2 = p$ 为其一对重特征根, ω_1 和 ω_2 的值可用一般的方法求出, 现着重讨论它们

对应的振型向量。

设 \dot{x}_1, \dot{x}_2 为其所对应的振型向量，它们的线性组合为

$$\dot{x}_m = c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 \quad (5-15)$$

\dot{x}_m 也是对应于 $\omega_1^2 = \omega_2^2 = P$ 的特征向量，这里 c_1 和 c_2 是任意实常数。事实上因为

$$k\dot{x}_1 = Pm\dot{x}_1$$

$$k\dot{x}_2 = Pm\dot{x}_2$$

所以

$$k\dot{x}_m = c_1 k\dot{x}_1 + c_2 k\dot{x}_2 = c_1 Pm\dot{x}_1 + c_2 Pm\dot{x}_2 = Pm\dot{x}_m$$

可见 \dot{x}_m 确是对应于 $\omega_1^2 = \omega_2^2 = P$ 的特征向量。由此看来，二重特征值对应的向量并非确定的两个特征向量，而是位形空间的一个二维子空间，这个子空间(平面)中任一个向量均可作为该二重特征值对应的特征向量。可以证明系统其他特征值对应的特征向量一定与该二维子空间正交，从而与该子空间上任一个特征向量正交。

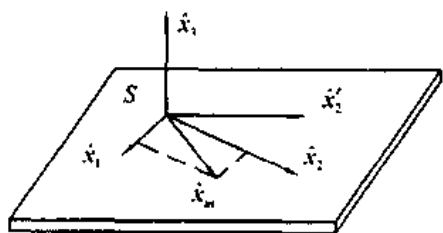


图 5-2 重根的几何解释

图5-2以一个三自由度系统为例，对重根给出了几何解释：对应于重根的两个线性独立的特征向量 \dot{x}_1 和 \dot{x}_2 确定了平面子空间 S ，另一个特征向量 \dot{x}_3 与 S 垂直， S 平面上的任一向量 \dot{x}_m 都是对应于重根的特征向量。从图5-2可看出，任取的 \dot{x}_1 与 \dot{x}_2 一般不满足正交性条件。为此可采取以下做法，确保振型正交性条件成立。

可选取 \dot{x}_1 作为正交基中的一个向量，它已经按 m 做归一化处理。而另一个向量可取为

$$\dot{x}'_2 = c\dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

令 \dot{x}'_2 与 \dot{x}_1 关于 m 正交，即满足

$$\dot{x}_1^T m(c\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0$$

可得出

$$c = -\dot{x}_1^T m \dot{x}_2$$

可证 \dot{x}_1, \dot{x}'_2 关于 k 也是正交的。如图5-2所示， \dot{x}_3, \dot{x}_1 和 \dot{x}'_2 构成三维位形空间中的正交坐标基。

例5-2 假定图5-3所示三自由度体系的质量为 $m_1 = m_2 = 1.00 \times 10^3 \text{ kg}$ ， $m_3 = 4.00 \times 10^3 \text{ kg}$ ；弹簧刚度分别为 $k_1 = 6.50 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $k_2 = 2.50 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $k_3 = 2.16 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $k_4 = 2.40 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $k_5 = 3.60 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $k_6 = 4.10 \times 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ 。试计算该体系的振动频率和振型。

【解】 体系的质量矩阵为

$$m = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 \\ 0 & 0 & 4.00 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$$

刚度矩阵为

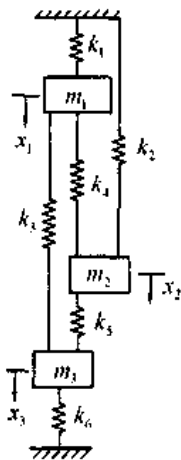


图5-3 具有重根的体系

$$k = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 + k_4 & -k_4 & -k_3 \\ -k_4 & k_2 + k_4 + k_5 & -k_5 \\ -k_3 & -k_5 & k_3 + k_5 + k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1106 & -240 & -216 \\ -240 & 850 & -360 \\ -216 & -360 & 4676 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

由频率方程

$$\det(k - \omega^2 m) = -(\omega^2 - 625)(\omega^2 - 1250)^2 = 0$$

可得 $\omega_1^2 = 625$, $\omega_2^2 = 1250$; 其中 ω_1^2 为一重根, ω_2^2 为二重根, 因此图5-3所示结构是一个退化系统。

将 $\omega_1^2 = 625$ 代入方程(3-42), 可得 $\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 40 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}^T$ 。

将二重特征根 $\omega_2^2 = 1250$ 代入方程(3-42), 有

$$\begin{bmatrix} -144 & -240 & -216 \\ -240 & -420 & -360 \\ -216 & -360 & -324 \end{bmatrix} \dot{x}_r = 0 \quad (a)$$

可以看到, 方程组(a)的系数矩阵的秩等于矩阵的阶数减去特征根的重数, 即 $3 - 2 = 1$, 因此方程组(a)中只有一个方程是独立的, 故可从三个方程中任选一个方程来求出相应的特征向量 \dot{x}_r ($r = 2, 3$)。我们知道, \dot{x}_r 是三维向量, 但确定它的方程只有一个。因此这个向量的三个分量中必有两个是独立的, 将它们称为独立参数。适当选择这两个独立的参数, 由方程(a)可求得两个线性无关的特征向量 \dot{x}_r 。令这两个特征向量具有下述形式

$$\dot{x}_2 = [\dot{x}_{12} \ 1 \ 0]^T, \quad \dot{x}_3 = [\dot{x}_{13} \ 0 \ 1]^T \quad (b)$$

若将它们代入方程组(a)中的任何一个方程, 可解得

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \dot{x}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

显然, 这两个特征向量是线性无关的。它们构成三维空间的一个二维子空间——平面 S 。这个子空间称为方程组(a)的解空间或特征值 ω_2^2 对应特征向量的解空间, 平面 S 称为方程组(a)的解平面或 ω_2^2 对应特征向量的解平面。解平面 S 内任意一个向量都是方程组(a)的解, 因为它可以用这两个向量的线性组合来表示。

我们知道, 不同特征值对应的特征向量是关于质量矩阵正交的。因此向量 \dot{x}_1 与上述两个向量关于质量矩阵正交。

求得三个特征向量后, 体系的三个振型也就得到了。可按(3-59)式求出每个振型正则坐标下的广义质量 M_i , 然后按下式对每个振型进行规格化

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{M_i}} \dot{x}_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (c)$$

式中, φ_i 为关于质量矩阵规格化后的振型, 其结果是

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 0.480 \\ 0.800 \\ 0.180 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} -0.857 \\ 0.514 \\ 0.000 \end{bmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} -0.600 \\ 0.000 \\ 0.400 \end{bmatrix}$$

注意到按(c)式进行规格化只是改变了每个向量的长度, 没有改变它的方向。因此向量 φ_1 与其余两个向量仍然关于质量矩阵正交, 且向量 $\varphi_r (r=2, 3)$ 仍在解平面 S 内。

现在要在解平面 S 内寻找一个新的向量 φ'_3 , 它与向量 φ_2 关于质量矩阵正交。用向量 $\varphi_r (r=2, 3)$ 的线性组合来表示这个新的向量

$$\varphi'_3 = c\varphi_2 + \varphi_3 \quad (d)$$

它满足正交关系

$$\mathbf{u}_{(2)}^T \mathbf{m}(c\mathbf{u}_{(2)} + \mathbf{u}_{(3)}) = 0 \quad (e)$$

展开上式, 可得到组合系数

$$c = -\varphi_2^T \mathbf{m} \varphi_3 = -\frac{1}{\sqrt{M_2}} = -0.514$$

将它代入(d)式, 得

$$\varphi'_3 = [-0.159 \quad -0.265 \quad 0.4]^T$$

由此求得了三个线性无关的特征向量 φ_1 , φ_2 和 φ'_3 , 其中每两个特征向量都是关于质量矩阵 \mathbf{m} 正交的。向量 φ_2 和 φ'_3 在 ω_2^2 对应的解平面 S 内, 向量 φ_1 不在解平面 S 内, 由于它和前两个向量是关于质量矩阵 \mathbf{m} 正交的, 将它前乘质量矩阵 \mathbf{m} 所得到的向量 $\mathbf{m}\varphi_1$ 就在解平面 S 的法线上了。

从本例看, 尽管特征根有多重根, 但并没有因为多重根而减少该特征问题的线性无关且满足正交条件的特征向量的个数, 因此第3章介绍的振型叠加法仍然适用。这个结论可推广到最一般的 n 个自由度体系中去。

考虑广义特征问题(5-3)式, 假定体系有 n 个自由度, 刚度矩阵 \mathbf{k} 是实对称阵, 质量矩阵 \mathbf{m} 是实对称正定阵(如果采用集中质量矩阵, 假定已实施静力凝聚), 且它们都是 n 阶矩阵, 向量 $\dot{\mathbf{x}}$ 的维数也为 n 。

线性代数中称特征根 ω_i^2 的重数为它的代数维数, 称由 ω_i^2 对应的特征向量 $\dot{\mathbf{x}}_i$ 构成解空间的维数为它的几何维数。可以证明: 当 \mathbf{k} 是实对称阵, \mathbf{m} 是实对称正定阵时, 每个特征根的代数维数等于它的几何维数。

这就是说, 当广义特征问题(5-3)式的系数矩阵 \mathbf{k} 和 \mathbf{m} 满足上述条件时, 如果某个特征根 $\omega^2 = \omega_r^2$ 是 k 重根, 则由 ω_r^2 对应的特征向量 $\dot{\mathbf{x}}_i$ 构成的解空间是 k 维空间, 即该解空间是 n 维空间的 k 维子空间。

将 $\omega^2 = \omega_r^2$ 代入特征方程(5-3), 得

$$(\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m}) \dot{\mathbf{x}}_r = 0 \quad (f)$$

上述方程的系数矩阵 $\mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m}$ 的秩为 $n - k$, 向量 $\dot{\mathbf{x}}_r$ 中独立参数的个数为 k 。从方程组(f)中任选 $n - k$ 个方程, 适当选择向量 $\dot{\mathbf{x}}_r$ 中的 k 个独立的参数的值, 可求得 k 个线性无关的特征向量 $\dot{\mathbf{x}}_{r+s} (s=0, 1, \dots, k-1)$ 。这 k 个线性无关向量构成特征值 ω_r^2 对应特征向量的解空间, 解空间是 n 维空间的一个 k 维子空间。子空间内有无穷多个向量, 其中任何一个向量都是方程组(f)的解, 并且可用 k 个线性无关的向量通过线性组合来表示。利用与(d)式和(e)

式相类似的关系式,从这无穷多个解向量中,可找到 k 个线性无关向量 φ_{r+s} ($s=0,1,\dots,k-1$),其中每两个特征向量都是关于质量矩阵 m 正交的,即满足正交关系(3-56)式,当然也满足正交关系(3-57)式。这就是说,尽管特征根 ω_j^2 有 k 重根,但仍然可以从其对应特征向量的解空间中找到 k 个线性无关的特征向量,它们都满足正交关系(3-56)式和(3-57)式。而特征方程(5-3)求得的线性无关的特征向量仍然是 n 个,它们都满足正交关系(3-56)式和(3-57)式。因此对最一般的 n 个自由度体系,第3章介绍的振型叠加法仍然适用。

5.2 用变分法求解多自由度体系的动力问题

在单自由度系统中,我们曾介绍过用变分法求解广义单自由度系统的动力问题。在此处,我们将介绍用变分法求多自由度系统的非线性振动和某些特殊动力问题的应用例子。

5.2.1 广义坐标

阐述多自由度的变分方法时广泛应用广义坐标。因此有必要先对广义坐标的概念下个

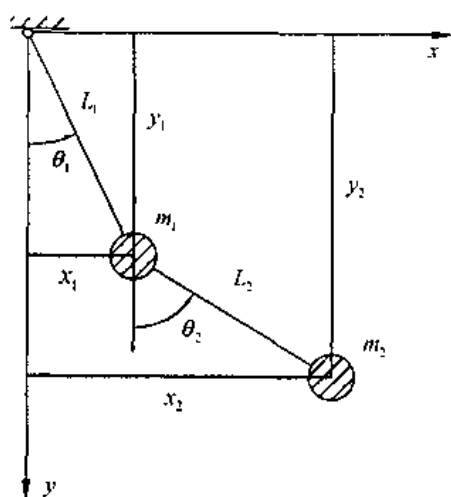


图 5-4 古典双摆

明确的定义。在 n 个自由度体系中的广义坐标可用任意一组 n 个独立量来定义。这些量是完全独立的,所以广义坐标之间不得以任何方式通过体系上的几何约束相关联。

图5-4所示的古典双摆可用坐标 x_1, y_1, x_2 和 y_2 给定两个质量 m_1 和 m_2 的位置,但这些坐标必须满足两个几何约束条件,即

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - L_1^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

因此, x_1, y_1, x_2 和 y_2 不是独立的,它们不能作为广义坐标。另外,若取 θ_1 和 θ_2 这两个坐标来确定质量 m_1 和 m_2 的位置,显然其中一个坐标保持不变时,另一个是可以改变的,因此它们之间是完全独立的,且坐标 θ_1

和 θ_2 是一组合适的广义坐标。

5.2.2 拉格朗日运动方程

1) 哈密顿原理

若对一个多自由度体系,只要能用一组广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_n 表示总动能 T 、总位能 V 及非保守力作的总虚功 δW_{nc} ,则有下式成立,即

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (5-17)$$

用此方程可导出 n 个自由度系统的运动方程,见下讨论。

2) 拉格朗日运动方程

结构体系的动能大多可以用广义坐标和它们的一次导数表示, 位能可以单独用广义坐标表示, 而非保守力在广义坐标的一组任意变分引起的虚位移上所做的虚功可以表示为这些变分的线性函数, 即

$$\begin{aligned} T &= T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ V &= V(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \delta W_{nc} &= Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n \end{aligned} \quad (5-18)$$

这里系数 Q_1, Q_2, \dots, Q_n 分别是对应于坐标 q_1, q_2, \dots, q_n 的广义力函数。

将(5-18)式代入(5-17)式, 并完成第一个积分的变分, 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \right) dt = 0 \quad (5-19)$$

对上式中与速度有关的项进行分部积分, 可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (5-20)$$

由于 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ (这是变分法中预加的条件), 因此(5-20)式右边第一项为零, 并代入(5-19)式, 经重新排列可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \right\} dt = 0 \quad (5-21)$$

因为所有的变分 $\delta q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都是任意的, 因此, 只有当方括号的项为零时, (5-21)式才能被满足, 即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (5-22)$$

(5-22)式就是众所周知的拉格朗日运动方程。它在科学和工程的各个领域都有广泛的应用。

例5-3 求图5-4所示双摆的自由振动运动方程。

【解】 用一组广义坐标 $q_1 = \theta_1$ 和 $q_2 = \theta_2$ 表示沿 x 和 y 坐标的位移以及这些位移对时间的一阶导数, 即

$$\begin{aligned} x_1 &= L_1 \sin q_1, & \dot{x}_1 &= L_1 \dot{q}_1 \cos q_1 \\ y_1 &= L_1 \cos q_1, & \dot{y}_1 &= -L_1 \dot{q}_1 \sin q_1 \\ x_2 &= L_1 \sin q_1 + L_2 \sin q_2, & \dot{x}_2 &= L_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + L_2 \dot{q}_2 \cos q_2 \\ y_2 &= L_1 \cos q_1 + L_2 \cos q_2, & \dot{y}_2 &= -L_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - L_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \end{aligned}$$

把上面的速度表达式代入到动能的基本表达式中

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

则

$$T = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [L_1^2 \dot{q}_1^2 + L_2^2 \dot{q}_2^2 + 2L_1 L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1)] \quad (a)$$

图5-4的双摆只存在由重力引起的位能。若假定 $q_1 = q_2 = 0$ 时位能为零, 则位能的关系式是

$$V = (m_1 + m_2)gL_1(1 - \cos q_1) + m_2 gL_2(1 - \cos q_2) \quad (b)$$

这里 g 是重力加速度。在这个体系中当然没有非保守力作用, 因此广义力函数 Q_1 和 Q_2 都等于零。

把(a)式和(b)式代入(5-22), 分别令 $i=1$ 和 $i=2$, 可得两个运动方程

$$(m_1 + m_2)L_1^2\ddot{q}_1 + m_2L_1L_2\ddot{q}_2\cos(q_2 - q_1) - \quad (c)$$

$$m_2L_1L_2\dot{q}_2^2\sin(q_2 - q_1) + (m_1 + m_2)gL_1\sin q_1 = 0$$

$$m_2L_2^2\ddot{q}_2 + m_2L_1L_2\ddot{q}_1\cos(q_2 - q_1) + \quad (d)$$

$$m_2L_1L_2\dot{q}_1^2\sin(q_2 - q_1) + m_2gL_2\sin q_2 = 0$$

在大幅度振荡时这些方程是高度非线性的, 然而在小幅度振荡时(c)式和(d)式能简化成线性形式

$$(m_1 + m_2)L_1^2\ddot{q}_1 + m_2L_1L_2\ddot{q}_2 + (m_1 + m_2)gL_1q_1 = 0 \quad (e)$$

$$m_2L_1L_2\ddot{q}_1 + m_2L_2^2\ddot{q}_2 + m_2gL_2q_2 = 0 \quad (f)$$

用任何一种标准特征问题分析方法, 例如行列式求解方法, 都能够容易地由线性化的运动方程求得小变形的振型和频率。

例5-4 假定一根长度为 L 、总质量为 m 的等截面刚性杆, 由一个弹性的无质量弯曲弹簧支承, 并且承受均匀分布的、随时间变化的外荷载作用, 如图5-5所示。如果取点1和点2从静力平衡位置向下的竖向挠度作为广义坐标 q_1 和 q_2 , 试求其在小挠度理论下的拉格朗日运动方程。

【解】 刚杆的总动能等于它平移及转动动能之和, 即

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{2}\right)^2 + \frac{mL^2}{24}\left(\frac{\dot{q}_1 - \dot{q}_2}{L}\right)^2$$

或

$$T = \frac{m}{6}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \quad (a)$$

由于 q_1 和 q_2 是从静力平衡位置起算的位移, 若体系的位能只是从弯曲弹簧所储存的应变能算得, 则重力可以忽略不计, 若这种应变能用刚度影响系数(图5-5所定义的)表示时, 位能可表示为

$$V = 0.5(k_{11}q_1^2 + 2k_{12}q_1q_2 + k_{22}q_2^2) \quad (b)$$

非保守荷载 $\bar{p}\zeta(t)$ 在任意变分 $\delta q_1(t)$ 和 $\delta q_2(t)$ 产生的虚位移上所做的虚功为

$$\delta W_{nc} = 0.5\bar{p}L(\delta q_1 + \delta q_2)\zeta(t) \quad (c)$$

因此

$$Q_1(t) = Q_2(t) = \frac{\bar{p}L}{2}\zeta(t) \quad (d)$$

把(a)式, (b)式和(c)式代入拉格朗日方程(5-22), 这个结构的线性运动方程为

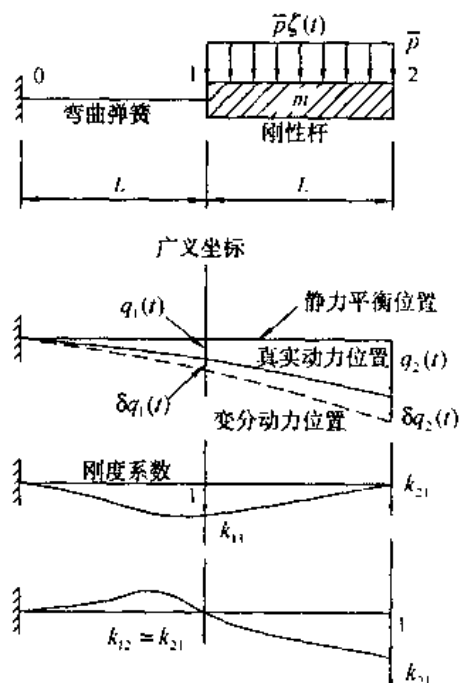


图 5-5 由无质量弯曲弹簧支撑的刚性杆

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{6}(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 &= \frac{\bar{p}L}{2}\zeta(t) \\ \frac{m}{6}(\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2) + k_{12}q_1 + k_{22}q_2 &= \frac{\bar{p}L}{2}\zeta(t) \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

习 题

5-1 图T5-1所示系统为一等质量梁，长为 l ，弯曲刚度为 EI ，梁上有三个集中质量，梁左端铰支，求此半正定系统的自振频率和振型。

5-2 应用拉格朗日方程，确定图T5-2所示体系在大变形条件下运动方程；并将此方程作线性化处理，由此得到该体系在小幅振动条件下的线性运动方程。

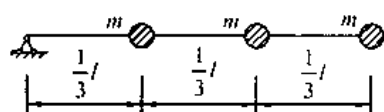


图 T5-1

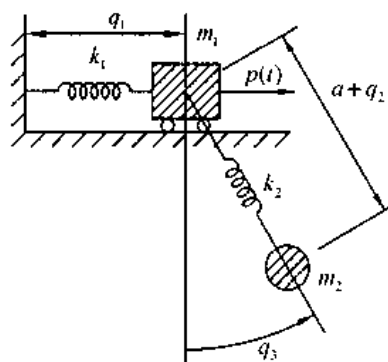


图 T5-2

第6章 实用振动分析

由振型叠加法可知,当频率和振型确定后就很容易求得任何线性结构的动力反应,而且往往只需考虑很少几个振型就能达到所需精度。为了达到所需精度而建立的计算模型只是对实际结构的某种近似,相应的求解方法也只能得到真实反应的某种近似解。由于实际结构的形式和规模不同,理想化模型所包含的自由度的数目也有很大差异,可能只含一两个自由度,也可能含有数百甚至数千个自由度,其中很可能只有数十个振型对动力反应有重要的影响。为了适应计算的需要,产生了各种各样的振动分析方法。本章重点介绍几种实用的算法,以满足实际工作的需要。

6.1 结构的动力特征值问题解的性质

求解结构的动力特性——自振频率和振型,在工程的实际应用及求解结构动力响应方面,都具有很重要的意义。

6.1.1 广义的和标准形式的特征值问题

一般来说,在讨论结构动力特性时,若不计阻尼作用,方程(3-2)变为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (6-1)$$

设结构作简谐运动,则有

$$x = \varphi \sin(\omega t + \theta) \quad (6-2a)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \varphi \sin(\omega t + \theta) \quad (6-2b)$$

其中 ω 为圆频率, θ 为初相角, φ 为与时间 t 无关的位移矢量,将上两式代入(6-1),得

$$(k - \omega^2 m)\varphi = 0$$

或

$$k\varphi = \lambda m\varphi \quad (6-3)$$

这就是结构动力问题的广义特征值问题。

在计算机程序库中,有的子程序是针对求解标准形式的特征值问题,此时亦可将方程(6-3)化为以下的标准形式

$$\tilde{k}\tilde{\varphi} = \lambda\tilde{\varphi} \quad (6-4)$$

数学上可证明(6-3)式和(6-4)式的关系, λ 值相同,但 $\tilde{\varphi}$ 与 φ 不同,而此时 \tilde{k} 不再为带状的,因此,一般情况下,不必将(6-3)式化为(6-4)式。

6.1.2 结构的动力特征值问题解的性质

结构的动力特征值问题解的性质可归纳如下。

① 在一般情况下,结构动力问题的刚度矩阵 k 是实对称正定(或半正定)矩阵;质量矩

阵 m 是实对称正定矩阵(如果采用集中质量矩阵, 假定已实施静力凝聚)。从特征方程(6-3)求得特征值是正的(或非负的)实数, 特征向量为实向量。

② 记

$$P(\lambda) = \det(k - \lambda m) = 0 \quad (6-5a)$$

$P(\lambda)$ 是特征根 λ 的 n 次多项式, 称为特征多项式。特征值方程(6-3)中解向量 ϕ 为非零的充分必要条件是

$$P(\lambda) = 0 \quad (6-5b)$$

从方程(6-5)可求出 n 个(包括重根在内)特征根 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 但其中可能有零特征根或重特征根。

③ 当 k 是半正定阵时, 方程(6-5)有零特征根 $\lambda_i = 0$, 它对应于结构的一种刚体运动, 零特征根的重数等于结构刚体位移的自由度数。

④ 特征向量 ϕ 的幅值是任意的, 但其分量的比值却为定值。

⑤ 特征问题(6-3)有 n 个线性无关且关于质量矩阵正交的特征向量。如果所有的特征根 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是单重根, 由线性代数知, 不同特征根对应的特征向量是线性无关的; 由 3.9 节知, 它们满足正交关系(3-56)式, 因此特征方程(6-3)有 n 个线性无关且关于质量矩阵正交的特征向量。如果某个特征根 λ_i 是 k 重根, 由线性代数知, 特征根的代数重数等于它的几何重数, 因此特征根 λ_i 对应应有 k 个线性无关的特征向量; 按 5.1.2 的方法, 利用这 k 个线性无关的特征向量, 又可找到 k 个与 λ_i 对应的线性无关且关于质量矩阵正交的特征向量。这就是说在有重根的情况下, 特征方程(6-3)仍有 n 个线性无关且关于质量矩阵正交的特征向量。因此无论方程(6-5)是否有重根, 第 3 章介绍的振型叠加法仍然适用。

⑥ 正交性: 无论方程(6-5)是否有重根, 都存在 n 个线性无关的特征向量, 它们满足正交关系

$$\phi_i^T m \phi_j = 0, \quad i \neq j$$

$$\phi_i^T k \phi_j = 0, \quad i \neq j$$

如果所有的特征向量 $\phi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都按 3.9 节的方法实施了关于质量阵的正交规格化, 则按(3-47)式排列的型阵 Φ 满足

$$\Phi^T m \Phi = I \quad (6-6)$$

$$\Phi^T k \Phi = \text{diag}(\lambda_i) \quad (6-7)$$

⑦ 若 x 为 n 维空间的任一向量, 定义瑞利(Rayleigh)商

$$R(x) = \frac{x^T k x}{x^T m x} \quad (6-8)$$

可以证明

$$\lambda_{\min} \leq R(x) \leq \lambda_{\max} \quad (6-9)$$

还可以证明, 如果向量 x 在某个特征向量 ϕ_i 的邻域内变化, 则当 $x = \phi_i$ 时, 瑞利商 $R(x)$ 取极小值, 这是瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)分析的依据。

6.2 矩阵迭代法

6.2.1 基本振型分析

以 n 阶方阵 D 表示体系的动力矩阵, 它定义为

$$D = \tilde{f}m = k^{-1}m \quad (6-10)$$

借助动力矩阵 D , 以无量纲的振型 φ 来替代 \dot{x} , 则(3-49)式所示的特征问题可写为

$$D\varphi = \lambda\varphi \quad (6-11)$$

其中

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \quad (6-12)$$

若将 n 个特征值 λ_i 按大小排列为

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n \quad (6-13)$$

则最大的特征值 $\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2}$, 即它对应着体系最低的振动频率(称为基频或第一阶频率)。

将 $\lambda = \lambda_i$ 和 $\varphi = \varphi_i$ 代入(6-11)式, 得

$$D\varphi_i = \lambda_i\varphi_i \quad (6-14)$$

若将上式左端看作一个新向量, 上式表示: 对于精确的振型, 新向量 $D\varphi_i$ 与原来的向量 φ_i 的各个元素之间都相差同一常数因子, 这个因子即为特征值 λ_i 。

由于体系的 n 个振型是线性无关的, 它们构成 n 维空间的一组基底, 任何 n 维空间的向量都可以表示为这组基底的线性组合。因此对于任意选定的一个试探向量(初始迭代向量) X_1 可以表示为

$$X_1 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n \quad (6-15)$$

上式两边前乘矩阵 D , 由(6-14)式得知, 第一次迭代后所得的向量为

$$\begin{aligned} X_2 = DX_1 &= a_1\lambda_1\varphi_1 + a_2\lambda_2\varphi_2 + \cdots + a_n\lambda_n\varphi_n = \\ &\lambda_1 \left(a_1\varphi_1 + a_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\varphi_2 + \cdots + a_n\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\varphi_n \right) \end{aligned}$$

注意到 λ_1 是最大的特征值, 上式中的 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ 都小于1, 因此比起其他振型来说, 第一振型 φ_1 在 X_2 内占的比重相对地比在 X_1 中占的比重大。换句话说, 用矩阵 D 迭代一次后, 扩大了迭代向量中第一振型的优势, 使它向第一振型逼近。经第二次迭代后, 得

$$X_3 = DX_2 = \lambda_1^2 \left[a_1\varphi_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2\varphi_2 + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^2\varphi_n \right]$$

同理, 第 $r-1$ 次迭代后的结果为

$$X_r = DX_{r-1} = \lambda_1^{r-1} \left[a_1\varphi_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{r-1}\varphi_2 + \cdots + a_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{r-1}\varphi_n \right] \quad (6-16)$$

可见随着迭代次数的增加, 第一振型的优势越来越大, 迭代向量越来越接近第一振型。当 r

充分大时, 上式可近似为

$$X_r = \lambda_1^{-1} a \phi_1$$

这时再迭代一次, 可得

$$X_{r+1} = DX_r = \lambda_1 X_r$$

由此可见, 迭代后的新向量 X_{r+1} 与原来的向量 X_r 的各个对应元素之间都仅差一个常数因子 λ_1 , 所以 X_r 或 X_{r+1} 就是对应于 λ_1 的第一振型, 而特征值 λ_1 可由下式算出

$$\lambda_1 = \frac{(x_k)_{r+1}}{(x_k)_r}, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (6-17)$$

式中 $(x_k)_r$ 表示向量 X_r 的第 k 个元素。为了避免迭代过程中振型向量的各分量变得过大或过小, 每次迭代后需要使向量规格化, 例如使它最大的一个元素成为 1。下面是实用矩阵迭代法的计算步骤:

- ① 选取初始迭代向量 X_1 , 使其最大的一个元素为 1;
- ② 对 X_1 作矩阵迭代, 并使新向量 Y_1 归格化, 即

$$Y_1 = DX_1 \quad (6-18a)$$

$$X_2 = \frac{1}{\max(Y_1)} Y_1 \quad (6-18b)$$

- ③ 重复步骤②, 第 r 次迭代结果为

$$Y_r = DX_r, \quad X_{r+1} = \frac{1}{\max(X_r)} X_r$$

- ④ 若在允许误差范围内有 $X_{r+1} = X_r$ 或 $Y_{r+1} = Y_r$, 则将 X_{r+1} 取作第一振型 ϕ_1 , 由(6-17)式知

$$\begin{aligned} Y_r &= DX_r = \lambda X_r \\ Y_{r+1} &= DX_{r+1} = \lambda X_{r+1} \\ \lambda_1 &= \frac{(y_k)_{r+1}}{(x_k)_{r+1}} \end{aligned}$$

一般取最大元素的比值来计算特征值, 注意到 X_{r+1} 已进行规格化, 其最大元素为 1。假定第 k 个元素最大, 则

$$\lambda_1 = (y_k)_{r+1} \quad (6-19a)$$

或

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{(y_k)_{r+1}} \quad (6-19b)$$

由(6-16)式看出, 矩阵迭代法计算 ϕ_1 及 ω_1 的收敛速度取决于比值 $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 越小, 收敛得越快。上述矩阵迭代法又称为逆迭代法。

如果迭代次数比较少, 例如只迭代了一次, 由(6-18a)式和 $\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2}$, 可近似地把 Y_1 看作

$$Y_1 \approx \frac{1}{\omega_1^2} X_1$$

将上式两边前乘 $Y_1^T m$ 来估算 ω_1^2 ，即

$$\omega_1^2 = \frac{Y_1^T m X_1}{Y_1^T m Y_1} \quad (6-20)$$

其误差会比较小。

例6-1 用矩阵迭代法计算例3-6的三层框架的第一振型和频率。

[解] 结构的柔度矩阵可以从该例给出的刚度矩阵求逆得到，也可以直接利用(3-9)式。这个结构的柔度矩阵是

$$\tilde{f} = k^{-1} = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

后乘质量矩阵，便得到动力矩阵

$$D = \tilde{f}m = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7.5 & 5 \\ 4 & 7.5 & 11 \end{bmatrix}$$

上面矩阵有一个常数因子 $\frac{1}{3600}$ 。在迭代过程中，实施(6-18a)式做矩阵乘法时要乘以这个常数因子；实施(6-18b)式进行规格化时又要除以这个因子。为了简化计算，在进行迭代求振型时，可不考虑这个因子。但迭代收敛后，在实施(6-19)式求特征值或频率时，在求 $(y_k)_{r+1}$ 时应乘以这个因子。

为了说明方法的有效性，这里故意选择一个较差的初始迭代向量 $X_1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ 。迭代过程用如下方式来计算基本振型

$$\frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7.5 & 5 \\ 4 & 7.5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16.5 \\ 22.5 \end{bmatrix}$$

随后的迭代计算过程用列表的方式给出

X_2	Y_2	X_3	Y_3	X_4	Y_4	X_5	Y_5
$\begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.73 \\ 1.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.8 \\ 12.1 \\ 18.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.31 \\ 0.67 \\ 1.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.25 \\ 11.26 \\ 17.26 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.30 \\ 0.65 \\ 1.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.15 \\ 11.08 \\ 17.08 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.301 \\ 0.646 \\ 1.00 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.14 \\ 11.04 \\ 17.04 \end{bmatrix}$

经四次循环后， X_5 形状的精度已达到二至三位有效数字，且与例3-6的结果相符合，说明方法十分有效。迭代法的一个优点是迭代过程中的运算失误，并不影响最后的结果。失误相当于由一个新的试探向量重新开始迭代。

按(6-19)式求得

$$\omega_1^2 = \frac{1}{(y_k)_{r+1}} = \frac{3600}{17.04} = 211$$

$$\omega_1 = 14.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

如果用(6-20)估算

$$\omega_1^2 = \frac{3600 \times \begin{bmatrix} 18.00 & 24.75 & 22.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 18.00 & 24.75 & 22.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 16.5 \\ 22.5 \end{bmatrix}} = 218, \quad \omega_1 = 14.76 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

其计算结果与例3-6给出的准确解 $14.50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 误差不足4%。

6.2.2 第二振型分析

如前所述, 每一次迭代总是扩大迭代向量 X_1 内第一振型 ϕ_1 的比重, 如果在每次试用的 X_1 中淘汰掉 ϕ_1 的成分, 那么迭代就会收敛到第二振型。将(6-15)式两边前乘 $\phi_1^T m$, 由正交条件(3-56)式得到 ϕ_1 的系数为

$$a_1 = \frac{1}{M_1} \phi_1^T m X_1 \quad (6-21)$$

式中, M_1 为(3-69a)式给出的广义质量。

从选定的试探向量 X_1 中消除第一振型的成分 $a_1 \phi_1$, 便得到经过净化了的试探向量

$$\tilde{X}_1 = X_1 - a_1 \phi_1 = X_1 - \frac{1}{M_1} \phi_1 \phi_1^T m X_1 = \left(I - \frac{1}{M_1} \phi_1 \phi_1^T m \right) X_1 \quad (6-22)$$

式中, I 为 n 阶单位阵。从理论上讲, 用这个净化了的向量作为迭代初始向量, 其结果就收敛于第二振型了。但在实际计算中, 由于舍入误差的影响, 第一振型的成分又会在迭代向量中再现, 因此每次循环都必须重复这个净化过程。为了简化此过程, 定义淘汰矩阵为

$$S_1 = I - \frac{1}{M_1} \phi_1 \phi_1^T m \quad (6-23)$$

显然, 用这个淘汰矩阵前乘任何一个试探向量, 都从该试探向量中消除了第一振型的成分, 得到一个净化了的向量。

引入淘汰矩阵后, (6-22)式变为

$$\tilde{X}_1 = S_1 X_1 \quad (6-24)$$

将上式两边前乘动力矩阵 D 得到一个新的向量

$$Y_1 = D \tilde{X}_1 = D S_1 X_1 \quad (6-25)$$

它比初始迭代向量 X_1 更为接近第二振型 ϕ_2 。令新的动力矩阵

$$D_2 \approx D S_1 \quad (6-26)$$

其作用是从任何一个试探向量 X_1 中消除第一个振型的成分, 并使结果向第二振型收敛。第二振型的计算步骤与前面给出的计算步骤完全相同, 只需用(6-26)式的 D_2 替代那里的 D , 所得结果自然是 ϕ_2 , λ_2 和 ω_2 了。如果只迭代了一次, 仍可用(6-20)式来估算 ω_2^2 , 其误差也比较小。

淘汰矩阵 S_1 还有一种构造方法, 用这种方法来构造淘汰矩阵, 可以减小计算工作量, 特别适用于手算。假定 X 是消除了第一振型的成分后被净化了的向量。把它代入(6-21)式,

应有

$$a_1 = \frac{1}{M_1} \phi_1^T m X = 0 \quad (6-27)$$

对其分子进行分块, 即

$$\phi_1^T [m_s \quad m_r] \begin{bmatrix} X_s \\ X_r \end{bmatrix} = \phi_1^T m_s X_s + \phi_1^T m_r X_r = 0 \quad (6-28)$$

式中, m_s 为质量矩阵 m 的第一列; X_s 为向量 X 的第一个元素 x_1 , 为了便于求更高振型时引用, 这里仍把它写为向量的形式。从(6-28)式可以解出

$$X_s = -(\phi_1^T m_s)^{-1} \phi_1^T m_r X_r \quad (6-29)$$

重新写出净化了的向量

$$X = \begin{bmatrix} X_s \\ X_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\phi_1^T m_s)^{-1} \phi_1^T m_r \\ I \end{bmatrix} X_r \quad (6-30)$$

这个式子说明, 不论向量 X 的第二个至第 n 个分量 X_r 为多少, 只要用(6-30)式来构造向量 X , 这个向量必然满足(6-27)式, 即它是消除了第一振型的成分, 被净化了的向量。因此可令淘汰矩阵

$$S_1 = \begin{bmatrix} -(\phi_1^T m_s)^{-1} \phi_1^T m_r \\ I \end{bmatrix} \quad (6-31)$$

当淘汰矩阵 S_1 用(6-23)式的形式给出时, 初始向量 X_1 的 n 个分量都要给定, 迭代时这些分量的值全部要算出。当 S_1 用(6-31)式的形式时, 只需要给出初始向量后 $n-1$ 个分量的值, 迭代过程中也只算这 $n-1$ 个分量的值。迭代收敛后, 再由(6-30)式组合出第一个分量的值。如果这个分量的绝对值大于1, 则需再规格化一次。

例6-2 计算例6-1结构的第二振型。

[解] 在前例中已经得到 $\phi_1 = [0.301 \quad 0.646 \quad 1.00]^T$ 。按(6-31)式计算淘汰矩阵。先把质量矩阵进行分块

$$m = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0.0 & 1.5 & 0 \\ 0.0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} = [m_s \quad m_r]$$

淘汰矩阵的第一行是

$$-(\phi_1^T m_s)^{-1} \phi_1^T m_r = -\frac{1}{0.602} [0.301 \quad 0.646 \quad 1.00] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} = [-1.61 \quad -1.66]$$

相应的淘汰矩阵为

$$S_1 = \begin{bmatrix} -1.61 & -1.66 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

利用前例中给出的 D , 求得

$$D_2 = DS_1 = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} -3.44 & -4.64 \\ 1.06 & -1.64 \\ 1.06 & 4.36 \end{bmatrix}$$

上式第一行在迭代过程中不起作用, 因为迭代时只需计算 X_i 的后两个分量, 迭代收敛后才需要利用(a)式给出的数据, 由(6-30)式计算 X 的第一个分量 x_1 的值。因此, 迭代过程可按列表的方式写为

$$\frac{1}{3600} \begin{bmatrix} - & - \\ 1.06 & -1.64 \\ 1.06 & 4.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ -0.58 \\ 5.42 \end{bmatrix}$$

随后的迭代计算过程用列表方式给出。

$$\begin{array}{cccccc} X_2 & Y_2 & X_3 & Y_3 & X_4 & Y_4 \\ \begin{bmatrix} - \\ -0.107 \\ 1.00 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ -1.75 \\ 4.25 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ -0.413 \\ 1.00 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ -2.08 \\ 3.92 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ -1.53 \\ 1.00 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ -2.20 \\ 3.80 \end{bmatrix} \\ X_5 & Y_5 & X_6 & Y_6 & X_7 & \\ \begin{bmatrix} - \\ -0.58 \\ 1.00 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ -2.26 \\ 3.75 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ -0.602 \\ 1.00 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} - \\ -2.28 \\ 3.72 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0.68 \\ -0.61 \\ 1.00 \end{bmatrix} & \\ & & & & \uparrow & \\ & & & & \text{最终形状} & \end{array}$$

在计算淘汰矩阵 S_1 时, 用到第一振型 ϕ_1 , 因此 ϕ_2 的精度取决于 ϕ_1 的精度。一般说来, ϕ_2 的精度要比 ϕ_1 低一位有效数字。在前例中, ϕ_1 仅有二至三位有效数字是可靠的, 因此这里只要求有两位有效数字一致就行了。所得的振型 $\phi_2 = [-0.68 \quad -0.61 \quad 1.00]^T$ 与例3-6有微小差别, 是由 ϕ_1 的精度只有三位有效数字引起的。

取 X_7 中的最大分量计算频率, 有

$$\omega_2^2 = \frac{1}{(Y_3)_6} = \frac{3600}{3.72} = 967.7, \quad \omega_2 = 31.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

与例3-6中的结果基本一致。

6.2.3 第三振型和更高振型分析

将(6-15)式两边分别前乘 $\phi_1^T m$ 和 $\phi_2^T m$, 利用正交条件可解得

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{M_1} \phi_1^T m X_1 \\ a_2 = \frac{1}{M_2} \phi_2^T m X_1 \end{array} \right\} \quad (6-32)$$

然后计算净化了的初始向量

$$\tilde{X}_1 = X_1 - a_1 \phi_1 - a_2 \phi_2 \quad (6-33)$$

且把它作为迭代的初始向量,其结果就必然收敛于 φ_3 。考虑到舍入误差的影响,每次迭代后仍须进行净化,因此需要构造消除第一和第二振型成分的淘汰矩阵 S_2 。

将(6-32)式代入(6-33)式,得到

$$\tilde{X}_1 = \left(I - \frac{1}{M_1} \varphi_1 \varphi_1^T m - \frac{1}{M_2} \varphi_2 \varphi_2^T m \right) X_1 \quad (6-34)$$

上式表明,只要从(6-23)式给出的第一振型的淘汰矩阵 S_1 中减去含第二振型的相应项,就能得到淘汰矩阵

$$S_2 = S_1 - \frac{1}{M_2} \varphi_2 \varphi_2^T m \quad (6-35)$$

其作用是从任何一个试探向量 X_1 中消除第一和第二振型的成分,得到一个净化了的向量。

引入淘汰矩阵后,(6-34)式成为

$$\tilde{X}_1 = S_2 X_1 \quad (6-36)$$

将上式两边前乘动力矩阵 D ,得到的新向量

$$Y_1 = D \tilde{X}_1 = D S_2 X_1 \quad (6-37)$$

(6-37)式中向量 Y_1 就比初始向量 X_1 更为接近第三振型 φ_3 了。令新的动力矩阵

$$D_3 = D S_2 \quad (6-38)$$

其作用是从初始迭代向量 X_1 中消除 φ_1 和 φ_2 两个振型分量,并使结果向 φ_3 收敛。可见只要在6.2.1给出的计算步骤中用 D_3 取代 D ,矩阵迭代就会收敛到 φ_3 及 ω_3^2 。

这个方法可以推广到更高的振型,例如要求 φ_4 ,相应的淘汰矩阵为

$$S_3 = S_2 - \frac{1}{M_3} \varphi_3 \varphi_3^T m \quad (6-39)$$

其作用是从试探向量中消除 φ_1 , φ_2 和 φ_3 三个振型分量,得到净化了的向量

$$\tilde{X}_1 = S_3 X_1 \quad (6-40)$$

相应的动力矩阵为

$$D_4 = D S_3 \quad (6-41)$$

以此类推,计算 φ_{i+1} 时,所用的两个矩阵是

$$\left. \begin{aligned} S_i &= S_{i-1} - \frac{1}{M_i} \varphi_i \varphi_i^T m \\ D_{i+1} &= D S_i \end{aligned} \right\} \quad (6-42)$$

这个方法的缺点是只能从最低的振型开始,依次逐个计算较高的振型,一个也不能漏掉;淘汰矩阵从较低振型得到,其精度也取决于较低振型的精度,因此高频振型的精度逐渐下降。一般只能用这种方法算到 φ_4 和 φ_5 ,更高的振型则不可靠。

6.2.4 最高振型分析

将特征方程(3-37)两边前乘 m^{-1} ,并以无量纲振型 φ 来替代 \hat{x} ,得

$$E \varphi = \omega^2 \varphi \quad (6-43)$$

式中

$$E = m^{-1}k = D^{-1} \quad (6-44)$$

包含了结构的动力特性。

与(6-11)式相比, (6-43)式相当于用 E 矩阵替代 D 矩阵, 用 ω^2 替代 λ 的结果。仿照(6-16)式的推导, 不断地用 E 矩阵去前乘任何一个试探向量 X_1 , 其结果就收敛于最高振型 φ_n 和最大的频率 ω_n^2 。迭代过程与6.2.1所述的完全相同, 只需用 E 去替代6.2.1的 D 就行了。

收敛速度取决于比值 $\frac{\omega_{n-1}^2}{\omega_n^2}$ 的大小。

如果试探向量 X_1 只前乘一次 E , 下面表达式仅近似地成立, 即

$$Y_1 = EX_1 \approx \omega_n^2 X_1$$

仿照(6-20)式的推导, 上式可近似的写为

$$Y_1 \approx \omega_n^2 X_1$$

两边前乘 $Y_1^T m$, 可解出

$$\omega_n^2 \approx \frac{Y_1^T m Y_1}{Y_1^T m X_1} \quad (6-45)$$

用(6-45)来估算 ω_n^2 所带入的误差也比较小。

这个迭代过程所用的迭代矩阵是 E , 首先求出体系的最高振型 φ_n 和频率 ω_n^2 , 此迭代方法称为正迭代法。原则上可以利用正迭代法从高频振型到低频振型逐个求出结构的振型, 但一般说来正迭代法的收敛速度要比逆迭代法慢得多, 因此除了计算最高振型外, 很少用它来计算其他振型。

例6-3 计算例6-1的三层结构的最高振型 φ_3 和振动频率。

[解] 原则上可利用前两例求得的 φ_1 和 φ_2 用逆迭代法来求出 φ_3 , 但这里用正迭代法来求出这个振型, 其结果可以达到任意精度。

利用例3-6给出的质量矩阵和刚度矩阵, 可算得迭代矩阵

$$E = m^{-1}k = 100 \begin{bmatrix} 15 & -6 & 0 \\ -8 & 12 & -4 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

由于第三振型有三个节点, 不妨设 $X_1 = [-1 \ 1 \ -1]^T$ 。迭代过程为

$$100 \begin{bmatrix} 15 & -6 & 0 \\ -8 & 12 & -4 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 24 \\ -12 \end{bmatrix}$$

随后的迭代计算过程用列表的方式给出

X_2	Y_2	X_3	Y_3	X_4	Y_4	X_7	Y_7
$\begin{bmatrix} -0.88 \\ 1.00 \\ -0.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -19.2 \\ 21.0 \\ -9.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.91 \\ 1.00 \\ -0.43 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -19.65 \\ 21.0 \\ -8.58 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.95 \\ 1.00 \\ -0.41 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20.1 \\ 21.2 \\ -8.4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.954 \\ 1.00 \\ -0.394 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20.34 \\ 21.24 \\ -8.36 \end{bmatrix}$

↑
最终形状

显然, 收敛速度要比例6-1计算第一振型时慢得多, 这是矩阵迭代法的一般特点, 但最后求得的振型与例3-6的结果非常接近。用 ω_2^2 替代(6-19a)式中的 λ_1 , 得到相应的频率

$$\omega_3^2 = (\nu_2)_7 = 100 \times 21.24 = 2124, \quad \omega_3 = 46.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

与例3-6的结果完全一致。

如果只迭代一次, 用(6-45)式来估算最高频率, 有

$$\omega_3^2 \approx \frac{[-42 \quad 36 \quad -12] \begin{bmatrix} -21 \\ 24 \\ -12 \end{bmatrix} \times 100}{[-42 \quad 36 \quad -12] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} \approx 2100, \quad \omega_3 = 45.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

其误差仅为1%。

6.2.5 带有移位的迭代法

逆迭代法计算最低振型时十分有效, 但计算高阶振型收敛速度慢, 且还必须从低到高逐个计算每一振型及其淘汰矩阵, 计算工作量相当大。正迭代法只适用于计算最高振型, 且收敛速度慢。为了克服这些缺点, 这里引入带有移位的迭代法。它可以随意计算体系的任何一个振型, 且收敛速度快, 能达到任意精度, 同时避免了求淘汰矩阵的烦琐计算。

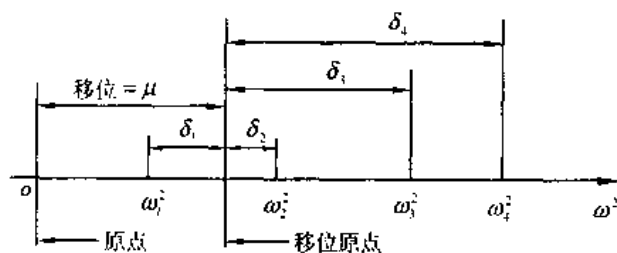


图 6-1 频率轴上的移位示意

以无量纲的振型 ϕ 替代特征方程(3-37)中的 \dot{x} , 把该方程改写为

$$k\phi = \omega^2 m\phi \quad (6-46)$$

令

$$\omega^2 = \mu + \delta \quad (6-47)$$

式中, $\mu > 0$ 为给定的移位, 如图6-1所示, 相当于把 ω^2 轴的原点移到 μ 处, 成为变量 δ 的原点; δ 为待求的余量, 可正可负。将(6-47)式代入(6-46)式, 可得

$$(k - \mu m)\phi = \delta m\phi \quad (6-48)$$

因为 μ 是事先选定的移位, 一般不等于体系的某个特征值, 因此假定上式左边圆括号内的矩阵是非奇异的矩阵, 对其求逆, 并引入新的动力矩阵

$$A = (k - \mu m)^{-1} m \quad (6-49)$$

这样(6-48)式又可改写为

$$\delta A\phi = \phi \quad (6-50)$$

与(6-11)式相比, 上式相当于用矩阵 A 替代矩阵 D , 用 $\frac{1}{\delta}$ 替代 λ 的结果。仿照(6-16)式的

推导可知,不断地用矩阵 A 去前乘任何一个试探向量 X_1 , 其结果收敛于 $\frac{1}{\delta}$ 最大为(指绝对值), 即余量 δ 为最小的一个振型 φ_m 和最小余量 δ_m (图6-1中为 ω_2 和 δ_2)。这种方法的迭代过程与6.2.1所述的完全相同, 只需用矩阵 A 去替代矩阵 D , 用 φ_m 和 $\frac{1}{\delta_m}$ 去替代 φ_1 和 λ_1 就行了。

收敛速度取决于比值 $\left| \frac{\delta_m}{\delta_{m-1}} \right|$ 和 $\left| \frac{\delta_{m+1}}{\delta_m} \right|$ 中的最小者。振型序号 m 由所得振型 φ_m 中元素的变号次数决定: 若变号次数为 2, 则 $m = 2 + 1 = 3$ 。由(6-47)式, 相应的频率

$$\omega_m^2 = \mu + \delta_m \quad (6-51)$$

μ 值可根据(6-20)式或(6-45)式选定。如果施加有频率为 $\bar{\omega}$ 的周期荷载, 要确定体系与 $\bar{\omega}$ 相接近的几个振动频率(一般这几个振型对反应的贡献也较大), 则可取 $\mu = \bar{\omega}^2$ 。

适当地选择移位 μ 的值, 可使迭代结果收敛于结构的任何一个振型。迭代进行若干次后, 每调整一次移位值, 就会使移位后的坐标原点更接近于 ω_m^2 , 从而加快收敛速度。与(6-20)式相类似, 迭代 r 次后, 新的移位值可近似地由下式算出

$$\mu_m = \frac{Y_r^T m X_r}{Y_r^T m Y_r} \quad (6-52)$$

在实施(6-49)式计算迭代矩阵 A 时, 需要进行矩阵求逆运算, 适当调整算式可避免求逆过程, 这里就不详细介绍了。

例6-4 用带有移位的迭代法计算例6-1的三层结构的最高振型 φ_3 和 ω_3^2 。

[解] 由例6-3, 取移位 $\mu = 2100$ (第一次迭代的估算值)。利用例3-6给出的数据, 可算得

$$k - \mu m = -150 \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

其逆阵

$$(k - \mu m)^{-1} = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 37 & -40 & 16 \\ -40 & 40 & -16 \\ 16 & -16 & 4 \end{bmatrix}$$

因此, 迭代矩阵

$$A = (k - \mu m)^{-1} m = \frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 74 & -60 & 16 \\ -80 & 60 & -16 \\ 32 & -24 & 4 \end{bmatrix}$$

取例6-3第一次迭代的结果为初始向量, 即 $X_1 = [-0.88 \quad 1.00 \quad -0.50]^T$ 。迭代过程为

$$\frac{1}{3600} \begin{bmatrix} 74 & -60 & 16 \\ -80 & 60 & -16 \\ 32 & -24 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.88 \\ 1.00 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -133.1 \\ 138.4 \\ -54.2 \end{bmatrix}$$

随后的迭代计算过程用列表的方式给出

$$\begin{array}{cc} X_2 & Y_2 \\ \begin{bmatrix} -0.962 \\ 1.00 \\ -0.391 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -137.4 \\ 143.2 \\ -56.3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{cc} X_3 & Y_3 \\ \begin{bmatrix} -0.959 \\ 1.00 \\ -0.393 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -137.2 \\ 143.2 \\ -56.3 \end{bmatrix} \end{array}$$

↑
最终形状

振型中元素的符号变号两次, 判断振型序号 $m=2+1=3$, 即求的是第三振型 φ_3 。所以 $\varphi_3 = [-0.959 \quad 1.00 \quad -0.393]^T$, 用 $\frac{1}{\delta_3}$ 替代(6-19a)式中的 λ_1 , 可得

$$\delta_3 = \frac{1}{(y_k)_{r+1}} = \frac{1}{(y_2)_2} = \frac{3600}{143} = 25.17$$

由(6-51)式

$$\omega_3^2 = \mu + \delta_3 = 2125.17$$

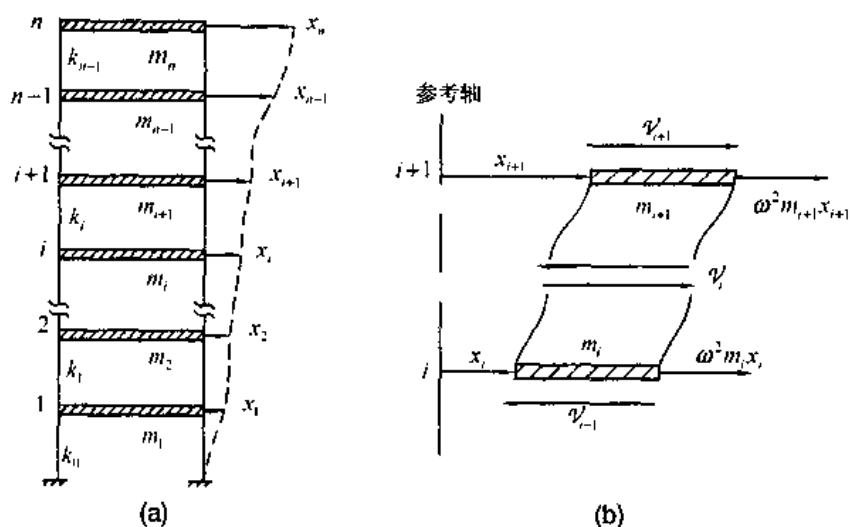
$$\omega_3 = 46.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

这个结果与例3-6给出的解一致, 但只迭代了三次, 比例6-3不考虑移位的迭代次数要少得多。

6.3 霍尔兹(Holzer)法

霍尔兹法(Holzer法)也适用于结构自由振动分析。霍尔兹法与矩阵迭代法的迭代过程不同, 矩阵迭代法是假定振型, 通过矩阵乘法和规格化不断地调整振动形状直到得到真实的振动形状后再计算相应的振动频率。

霍尔兹法的求解次序与此相反, 先假定振动频率和一端的位移, 利用结构的惯性特性和弹性特性递推另一端的位移, 看它满足边界条件否? 若不满足, 重新假定振动频率, 再算一次, 直到另一端的位移满足边界条件为止。即不断地调整振动频率, 直到得到真实的



(a) 结构体系 (b) 典型楼层的力和位移
图 6-2 一个剪切型建筑的霍尔兹分析

振动频率为止，与此同时真实的振型也就得到了。

霍尔兹法最适用于分析链式结构，这种结构的构件是沿一条基本轴线排列。最简单的实例是图6-2所示的剪切型建筑。假定楼板是刚性的，质量集中于楼板，柱子是无重的，不考虑节点的转动，结构的侧向挠度仅仅是由柱子的剪切变形引起的。在这种情形中，质量 m_{i+1} 和 m_i 之间产生单位相对位移所需的力，即第 i 层的层间刚度是

$$k_i = \left(\frac{12EI}{h^3} \right)_i \quad (6-53)$$

式中 EI 为第 i 层柱子的抗弯刚度， h 为层间高度。

与单自由度体系相类似，多自由度体系发生自由振动时，适当选择时间坐标的原点，质量 m_i 的位移可表示为

$$x_i(t) = X_i \sin \omega t$$

加速度为

$$\ddot{x}_i(t) = -\omega^2 X_i \sin \omega t$$

其中， ω 为结构的自由振动频率，即待求的振动频率； X_i 为位移的幅值，即相应振型第 i 个分量的值。由达朗贝尔原理，作用于质量 m_i 的惯性力为

$$f_{li}(t) = -m_i \ddot{x}_i(t) = \omega^2 m_i X_i \sin \omega t$$

其幅值为

$$F_{li} = \omega^2 m_i X_i$$

为和工程常使用的习惯一致，在下面的讨论中用符号 x_i 来代替位移幅值 X_i ，用 f_{li} 表示惯性力幅值 F_{li} ，并忽略时间因素，在讨论中略去“幅值”二字。

结构发生自由振动时，作用于结构的力只有惯性力 $f_{li} = \omega^2 m_i x_i$ ，在每层柱子内部产生的剪力(弹性内力) \mathcal{V}_i 与相应的惯性力保持平衡。显然，顶层的剪力 $\mathcal{V}_n = 0$ ；基础位移 $x_B = 0$ 。假定一个频率 ω^2 和顶层位移 $x_n = 1$ ，可以递推固定端的位移。假定已算得第 $i+1$ 层的剪力 \mathcal{V}_i 和质量 m_{i+1} 的位移 x_{i+1} ，递推过程为

质量 m_{i+1} 的惯性力

$$f_{li(i+1)} = \omega^2 m_{i+1} x_{i+1} \quad (6-54a)$$

第 i 层柱子的剪力

$$\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_{i+1} + f_{li(i+1)} \quad (6-54b)$$

第 i 层层间相对位移

$$\Delta_i = \frac{\mathcal{V}_i}{k_i} \quad (6-54c)$$

质量 m_i 的位移

$$x_i = x_{i+1} - \Delta_i \quad (6-54d)$$

利用这几个式子，可以从顶层的剪力 $\mathcal{V}_n = 0$ 和位移 $x_n = 1$ ，递推基础位移 x_B ，观察它是否满足边界条件 $x_B = 0$ 。如果不满足，则重新假定 ω^2 ，再试算。

现在问题是：在一次试算结束后，如果基础位移 $x_B \neq 0$ ，如何判断所假定的频率 ω^2 是偏高还是偏低；且如果 $x_B = 0$ ，又如何确定所得振型的序号。下面将讨论此问题。

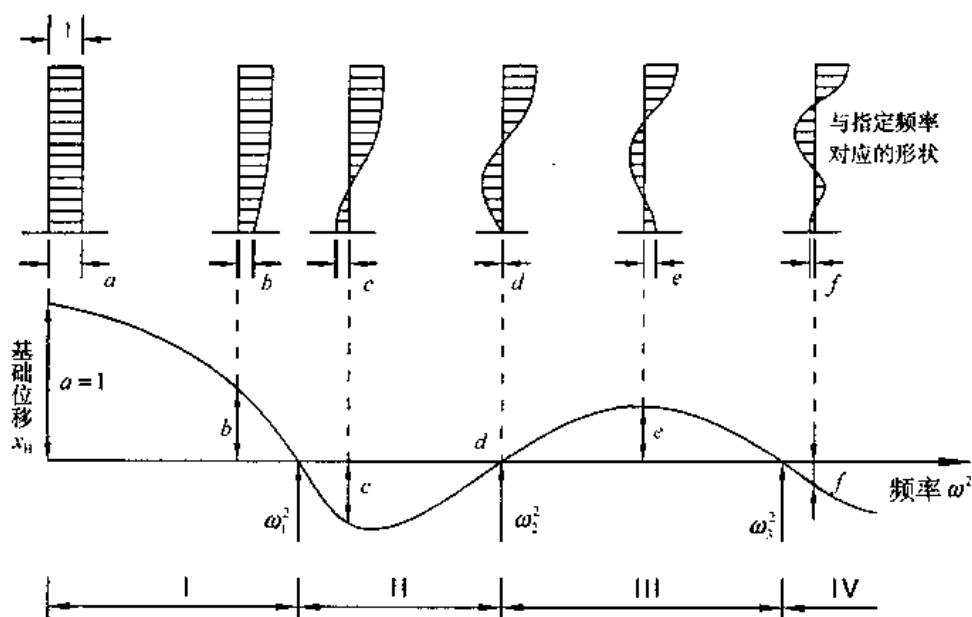


图 6-3 与假定频率对应的基础位移变化图(假定顶层位移为 1)

剪切型结构的振型有一个重要性质,即振型的节点(位移值为零的点)数目等于振型的序号,且基础也作为一个节点。根据这个性质,可以判断假定的频率值 ω^2 和算得的振型所落入的范围。如图6-3所示,在区间I,算得振型的节点数为零,基础位移 $x_B > 0$ 。说明假定的频率 $\omega^2 < \omega_1^2$,应增加 ω^2 再试算。在区间II,节点数为1, $x_B < 0$, $\omega_1^2 < \omega^2 < \omega_2^2$,要算 ω_1^2 值,则减小 ω^2 的值;要算 ω_2^2 的值,则加大 ω^2 的值。同样,也可以找到其他区间的特点。显然,霍尔兹法可以单独计算任何一个振型,而不必从低到高逐个算出每一个振型,这是这种方法的主要优点。

例6-5 用霍尔兹法计算例3-6的结构的第一频率和振型。

[解] 按图6-2的编号顺序把结构重新绘于图6-4中。第一次试算,随意取 $\omega_{(1)}^2 = 100$ (ω 的下脚标表示试算次数),顶层位移 $x_3 = 1\text{m}$,当然这个值太大,但我们关心的是振动形态,即各质量相对的位移值。为了计算简便,不妨这样设置位移的单位,即把最后所得的振型看作无量纲振型。此外还知道 m_2 上部的剪力 $\mathcal{V}_3 = 0$ 。根据这些数据,利用(6-54)式,可逐层递推各层的位移,计算结果列入表6-1中,这里仅讨论一下有关的细节。选定频率 $\omega_{(1)}^2 = 100$ 和 $x_3 = 1\text{m}$,由(6-54a)式可算得顶层的惯性力

$$f_{13} = \omega_{(1)}^2 m_3 x_3 = 100 \times 1.0 \times 10^3 = 100 \text{ kN}$$

由(6-54b)式,第2层(以刚度 k 的脚标来记层数)柱子的剪力为

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_3 + f_{13} = 0 + 100 = 100 \text{ kN}$$

第2层层间相对位移为

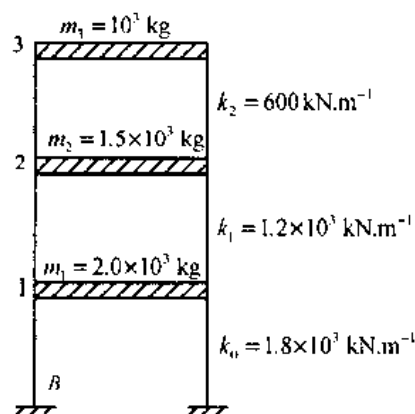


图 6-4 霍尔兹法分析建筑物振型

$$\Delta_2 = \frac{v_2'}{k_2} = \frac{100}{600} = 0.167 \text{ m}$$

质量 m_2 的位移为

$$x_2 = x_3 - \Delta_2 = 1.00 - 0.167 = 0.833 \text{ m}$$

求得 x_2 后, 又可计算 m_2 的惯性力 f_{12} , 第1层层间的剪力 v_1 和相对位移 Δ_1 , 以及质量 m_1 的位移。如此循环下去, 最后求得基础位移 $x_B^{(1)} = 0.449 \text{ m} > 0$ (x_B 的上标表示试算次数)。其值较大, 且所有质量的位移都大于零, 说明 $\omega_{(1)}^2 = 100$ 太小, 第二次使它加倍, 取 $\omega_{(2)}^2 = 200$, 再试算。得 $x_B^{(2)} = 0.038 \text{ m} > 0$, 已经比较小了, 说明所取的频率值接近于真实值了, 从所得振型各分量均大于零来看, 下一次计算仍应加大频率值。

表6-1 例6-5的计算结果

计算I ($\omega^2 = 100$)				计算II ($\omega^2 = 200$)				计算III ($\omega^2 = 209$)			
x	Δ	v	f_1	x	Δ	v	f_1	x	Δ	v	f_1
1.000			100	1.000			200	1.000			209
	0.167	100			0.333	200			0.348	209	
0.833			125	0.667			200	0.652			204
	0.187	225			0.333	400			0.344	413	
0.646			129	0.334			133	0.307			129
	0.197	354			0.296	533			0.301	542	
0.449				0.038				0.00629			

经过两次试算后, 希望第三次试算所得的基础位移 $x_B^{(3)} = 0$, 可用前两次试算的结果, 用线性外插值的方法选取第三次试算应取的频率值 $\omega_{(3)}^2$ 。把基础位移 x_B 近似地看作随频率 ω^2 线性地变化, 将前两次所得结果绘于图6-5中, 这个图可近似地看作图6-3区间I部分的放大图形, 图中加圆括号的角标表示试算序号。 $\Delta x_B^{(1-2)}$ 表示第一次和第二次试算基础位移的增量, 即 $\Delta x_B^{(1-2)} = x_B^{(1)} - x_B^{(2)}$; $\Delta \omega_{(1-2)}^2$ 表示两次试算所取的

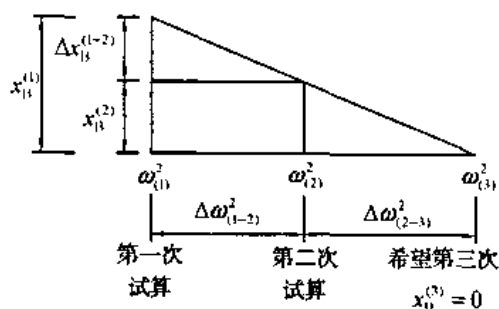


图 6-5 试算频率的线性插值

频率值的增量, 即 $\Delta \omega_{(1-2)}^2 = \omega_{(2)}^2 - \omega_{(1)}^2$ 。利用三角形的相似关系有

$$\left(\frac{\Delta \omega^2}{\Delta x_B} \right)_{(1-2)} = \left(\frac{\Delta \omega^2}{\Delta x_B} \right)_{(2-3)} \quad (a)$$

第三次的试算频率

$$\omega_{(3)}^2 = \omega_{(2)}^2 + \Delta \omega_{(2-3)}^2 \quad (b)$$

将所得数据代入(a)式, 有

$$\frac{200 - 100}{0.449 - 0.038} = \frac{\Delta \omega_{(2-3)}^2}{0.038 - 0}$$

从而

$$\Delta\omega_{(2-3)}^2 = 9$$

因此,第三次试算取

$$\omega_{(3)}^2 = 200 + 9 = 209$$

其计算结果也列入表6-1中。因为 x_B 不是 ω^2 的线性函数,所以第三次求得的 $x_B^{(3)}$ 仍大于零。再次利用(a)式,有

$$\frac{9}{0.03171} = \frac{\Delta\omega_{(3-4)}^2}{0.00629}, \quad \Delta\omega_{(3-4)}^2 \approx 1.8$$

第四次试算取 $\omega^2 = 210.8$, 其对应位移为 $x = [1.000 \quad 0.6487 \quad 0.3021 \quad 0.00026]^T$, x_B 已经很小,说明位移已经相当精确了。进一步迭代可得

$$\omega_1^2 = 210.879 \quad \varphi_1 = [1.000000 \quad 0.648535 \quad 0.301850]^T$$

基础位移 $x_B = -0.544 \times 10^{-6}$, 可看作精确解。

6.4 瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)分析

在工程中,当把一个实际结构离散为多自由度体系,动力特性分析往往归结为阶次很高的广义特征值问题。对这样的问题,即使借助电算,要求全部特征对也是非常麻烦的事情。幸好在实际问题中,人们最关心的不是全部特征对,而只是其中的一小部分,即估算结构前 q 阶($q \ll n$)特征对就够了。在这种情况下,可以用一种近似的有效方法,将 n 阶广义特征值问题化为 q 阶广义特征值问题,这就是瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)分析法。

由瑞利商特性,有

$$\lambda_1 = \lambda_{\min} = \min R(X) = \min \frac{X^T k X}{X^T m X} \quad (6-55)$$

这里取极小的过程是对 n 个特征向量构成的 n 维空间中的所有 X 进行的。而瑞利-里兹分析的思想是取极小的过程可以近似地在一个 q 维空间中进行。若我们打算求系统的前 p 阶特征对时,则事先选取 $q \geq p$ 个已知的线性无关矢量 $Y_i (i=1, 2, \dots, q)$, 令 X 为这些矢量的线性组合,有

$$X = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_q Y_q = \sum_{i=1}^q a_i Y_i = Y A \quad (6-56)$$

式中, Y_i 称为里兹基, Y 是由里兹基矢量构成的 $n \times q$ 阶矩阵, a_i 为待定常数,称里兹坐标, A 满足的方程可通过瑞利商的极小化过程导出。由瑞利商的定义可知

$$R(X) = \frac{X^T k X}{X^T m X} = \frac{A^T Y^T k Y A}{A^T Y^T m Y A}$$

若记

$$\begin{aligned} k^* &= Y^T k Y \\ m^* &= Y^T m Y \end{aligned} \quad (6-57)$$

k^* 和 m^* 分别称为原刚度矩阵及质量矩阵在 Y_1, Y_2, \dots, Y_q 所构造的 q 维子空间上的投影。此时

$$R(X) = \frac{A^T k^* A}{A^T m^* A} \quad (6-58)$$

$R(X)$ 取极小的必要条件是 $\frac{\partial R(X)}{\partial A} = 0$ ，利用二次型对向量求偏导的法则，得

$$2A^T m^* A k^* A - 2A^T k^* A m^* A = 0$$

即

$$k^* A = \frac{A^T k^* A}{A^T m^* A} m^* A$$

由(6-58)

$$k^* A = R(X) m^* A \quad (6-59)$$

式中， k^* ， m^* 都是 $q \times q$ 阶矩阵， A 是里兹坐标矢量。(6-59)式为 A 应满足的方程，实际上，这又是一个广义特征值问题。

因为 k ， m 和 Y 都是已知的，所以 k^* 和 m^* 很容易由式(6-57)解算出，这样求系统的特征值问题便转化为求 q 阶广义特征值问题(6-59)。由于 $q \ll n$ ，求解(6-59)相对较容易。

求解(6-59)式可得 q 个特征值 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$ ，这就是原体系 q 阶特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ 的近似值。同时求得 A 后，可通过下式得到 q 个子空间的特征矢量

$$X_i = \sum_{j=1}^q a_{ij}^{(i)} Y_j, \quad (i=1, 2, \dots, q)$$

X_i 就是原体系特征向量 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q$ 的近似值。在这个分析中，计算出的近似特征值为准确值的上界

$$\lambda_1 \leq \rho_1, \quad \lambda_2 \leq \rho_2, \quad \dots, \quad \lambda_q \leq \rho_q$$

一般说来，用此法求出的低阶特征值和相应的特征向量效果较好，而计算高阶特征值和相应的特征向量效果较差。计算精度与事先假定的向量 Y_i 的近似程度以及 q 与 n 的比例有关。

本方法的关键是如何选取假定的里兹量 Y_i ，通常可采取以下两个途径：

① 可把各个子结构的低阶振型，通过对接处的位移协调而装配成整体结构的振型，把这样的振型选作 Y_i 。

② 可将瑞利-里兹分析与同时递迭代方法联合使用，这样可以选取同时递迭代中的初始向量组作为 Y_i 。这种方法就是用途甚广的子空间迭代法。

6.5 子空间迭代法

子空间迭代法是改进的瑞利-里兹分析，它可对任意个特征向量进行同时迭代，被广泛地用于各种大型结构分析程序中。

假定要计算特征值问题(6-3)最低的 p 个特征对，使其达到要求的精度。我们可多计算几个特征对，取

$$q = \min(2p, p+8) \quad (6-60)$$

子空间迭代法对体系最低的 q 个特征向量实施同时迭代，对于大型问题 $q \ll n$ 。

设已实施了 k 步迭代, 求得 q 个特征向量第 k 步的近似值 $(x_i)_k (i=1, 2, \dots, q)$, 将它们组成 $n \times q$ 阶矩阵

$$X_k = [(x_1)_k \quad (x_2)_k \quad \dots \quad (x_q)_k] \quad (6-61)$$

子空间迭代法的计算过程总结如下。

1) 迭代步骤

① 由下列方程求第 $k+1$ 步迭代的里兹基 Y_{k+1}

$$kY_{k+1} = mX_k, \quad k=1, 2, \dots \quad (6-62)$$

② 计算刚度矩阵 k 和质量矩阵 m 在第 $k+1$ 步迭代里兹基下的投影

$$\begin{aligned} k^* &= Y_{k+1}^T k Y_{k+1} \\ m^* &= Y_{k+1}^T m Y_{k+1} \end{aligned} \quad (6-63)$$

③ 求下列投影特征方程的解

$$k^* A_{k+1} = m^* A_{k+1} \rho_{k+1} \quad (6-64)$$

式中, 各个矩阵都是 $q \times q$ 阶矩阵, A_{k+1} 为第 $k+1$ 步迭代的里兹坐标; ρ_{k+1} 为对角阵, 其对角元为特征值的第 $k+1$ 步近似值。

④ 求改进后的特征向量的近似值

$$X_{k+1} = Y_{k+1} A_{k+1} \quad (6-65)$$

只要初始迭代矩阵 X_1 中的各个列向量不正交于系统的 q 个最低的振型, 就有

$$\rho_{k+1} \rightarrow \Lambda \text{ 和 } X_{k+1} \rightarrow \Phi, \text{ 当 } k \rightarrow \infty$$

式中, Λ 是 $q \times q$ 阶对角阵, 其对角阵为特征问题(6-3)最低的 q 个特征值。

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$$

Φ 是相应的 $n \times q$ 型阵

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_q]$$

2) 迭代初始向量的选择

设 \bar{X}_1 是当 $k=1$ 时, (6-62) 式等号右边执行矩阵乘法计算后的结果。记

$$\bar{X}_1 = mX_1 = [\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \dots \quad \bar{x}_q]^T \quad (6-66)$$

设定其各列为

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= [m_{11} \quad m_{22} \quad \dots \quad m_{nn}]^T \\ \bar{x}_2 &= [0 \quad \dots \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{第 } i_2 \text{ 个分量为 } 1) \\ \bar{x}_3 &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad \dots \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{第 } i_3 \text{ 个分量为 } 1) \\ &\vdots \\ \bar{x}_q &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad 0]^T \quad (\text{第 } i_q \text{ 个分量为 } 1) \end{aligned} \quad (6-67)$$

式中, 分量号 i_2, i_3, \dots, i_q 是按下述方法确定的。

从刚度矩阵 k 和质量矩阵 m 的 n 个对角元的比值 $\frac{k_{ii}}{m_{ii}} (i=1, 2, \dots, n)$ 中选出 $q-1$ 个最小值, 设它们从小到大的排列顺序为

$$\frac{k_{i_2 i_2}}{m_{i_2 i_2}}, \frac{k_{i_3 i_3}}{m_{i_3 i_3}}, \dots, \frac{k_{i_q i_q}}{m_{i_q i_q}} \quad (6-67a)$$

即比值最小的对角元在刚度矩阵 k 和质量矩阵 m 中的行号(或列号)为 i_2 , 其次为 i_3 等等。

(6-67)式的第2至第 q 个分量事实上是

$$\bar{x}_j = e_j \quad (j = 2, 3, \dots, q; i = i_2, i_3, \dots, i_q) \quad (6-67b)$$

这里 e_j 为单位向量。显然, 这 $q-1$ 个向量是彼此正交的。

按上述方法设定 \bar{x}_1 的第2至第 q 列的依据是假定特征值问题(6-3)的刚度矩阵 k 和质量矩阵 m 都是对角阵。在此极端情况下, (6-67a)式给出了系统的 $q-1$ 个最小的特征值, 而(6-67b)式给出了相应的特征向量。因此, 按(6-67b)式设定 $q-1$ 个分量保证了系统的低阶振型均被激活, 而按(6-67)式第一个表达式设定的 x_1 又保证了全部有质量的自由度受到激励, 没有遗漏。

这里仅用了 $q-1$ 个满足正交关系的向量, 这就是子空间迭代法取 $q > p$ 的原因。(6-67)式的第一个向量 x_1 可看作附加向量。

3) 收敛性判别

由特征方程(6-64)求得的特征值 $\rho_i (i = 1, 2, \dots, q)$ 就是原特征方程(6-3)的特征值 λ_i 的近似值。迭代结果满足下述条件

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k)}} \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6-68)$$

式中, ε 为容许误差。若迭代结果满足(6-68)就认为在容许误差范围内, 迭代已收敛, 可结束迭代。式中 λ_i 的上标表示迭代步次数。

习 题

6-1 用矩阵迭代法计算习题3-2所给结构的基本振型和频率。

6-2 用矩阵迭代法计算习题3-16所给结构的第二振型和频率。并用给定的第一振型 φ_1 和(6-22)式计算淘汰矩阵 S_1 。

6-3 用(6-23)式的淘汰矩阵表达式重算习题6-2。

6-4 推导与(6-31)式相类似的淘汰矩阵 S_2 。

6-5 用矩阵迭代法计算习题3-2所给结构的最高振型和频率。

6-6 用带有位移的迭代法重算习题6-5, 并用(6-45)式来估算移位 $\mu = \omega_n^2$ 。

6-7 用带有移位的迭代法, 重算习题6-2。取移位 $\mu = 0.98\omega_2^2$, 其中 ω_2 采用习题3-16给出的值。

6-8 用霍尔兹法计算习题3-2所给剪切型建筑物的前两个振型和频率。

第7章 地震学基础

7.1 地震的基本知识

7.1.1 地震的种类和成因

1) 什么是地震

地震是一种自然现象。它是伴随着地壳上的能量的释放而引起的地球表面的振动甚至强烈的运动。这种能量释放可能由于地壳某些部位的突然断裂、火山爆发及人为原因而引起，而绝大多数毁灭性地震是由于地壳的断裂所引起的。全世界每年发生的地震约达 1.5×10^7 次，绝大多数地震由于发生在地球深处或它所释放的能量小而不为人们察觉。人们能察觉到的地震即有感地震，约占地震总数的1%左右。造成灾害的强烈地震则为数更少，平均每年发生十多次。强烈地震发生时，在震中地面剧烈摇晃、颠簸；地面振动在很大范围内都能被感知，全世界都能用仪器测出。在震中附近，除造成建筑物破坏外，还会出现地面变形、隆起、下陷或水平位移，山区地震往往引起大规模山崩、滑坡和泥石流；海底发生地震还会引起海啸，这些现象都会给人类造成灾害。在学习结构物抗震、隔震、控震这方面知识之前，有必要了解地震发生的原因和一些特性。

2) 地球的构造

地球是一个很大的实心球体，它的平均半径约为 6400 km。地球内部构造如图 7-1 所示，可以分为性质不同的三层。地壳是地球最表面的一层，平均厚度为 30 km；地壳下面约 2900 km 厚的一层叫做地幔；最里面的部分叫做地核，其半径约 3470 km。

地壳由各种不均匀的岩石组成，它的厚度也不是均匀的，高山或高原处厚度可达 60 km，而在深海底只有 5~8 km。世界上绝大多数的地震都发生在地壳这一层内。

地幔主要由质地非常坚硬、比重较大的黑色橄榄岩组成。由于这一部分压力大(地幔上部的压力约为 9×10^4 MPa)、温度高(按照地热增温率计算，地面以下 30 km 处就可达 1000°C)，因此一般推测地幔的材质可能具有粘弹性，其顶部存在着缓慢运动着的软流层。

地壳与地幔的分界面称之为莫霍诺维奇间断面(简称莫霍面)，它是一个地震波传播速度急剧

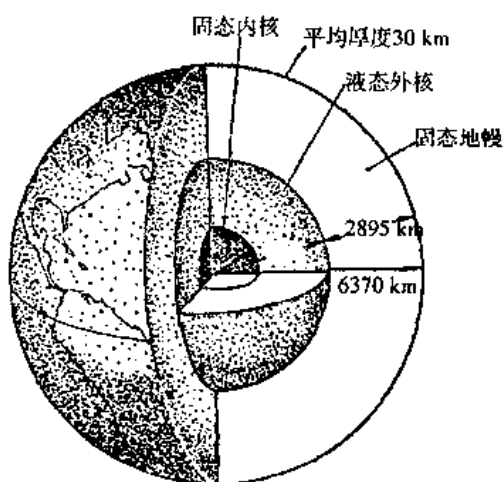


图 7-1 地球构造示意图

变化的不连续面。

据推测,地核主要由铁、镍等物质组成,那里压力大于 3×10^5 MPa, 温度高达 $4000 \sim 5000^\circ\text{C}$ 。根据地震波传播分析,外核可能处于液态,而内核可能是固态。

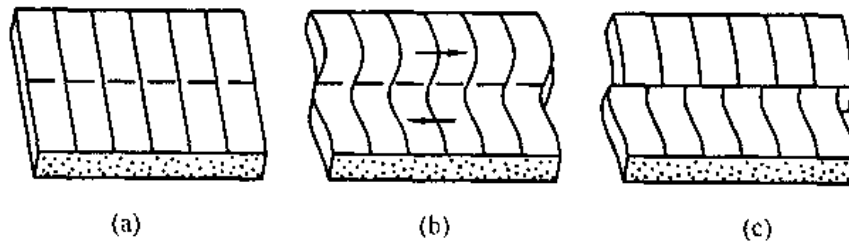
地球结构除极薄的面层可通过钻孔直接探测之外,深处的结构基本靠地震波传播的资料推测,在地球构造这个问题上存在不少尚未解决的疑问。

3) 地震的成因

从地震成因来分,主要可分为火山地震、塌陷地震及构造地震。由于火山活动而引起地震叫火山地震。由地下岩洞突然塌陷而引起地震叫陷落地震。构造地震则是由地球内部岩层构造活动在某些阶段发生急剧变化而引起。除上述由于自然原因引起的地震外,还有由于人为活动(如人工爆破、水库蓄水、深井抽液或注液、矿山及油气田的开采等)而引起地震称为诱发地震。

上述几种地震中,一般给人类造成较大灾害的是构造地震,尤以浅源地震造成的灾害为大。因此,从工程抗震的角度来说,构造地震是我们研究的主要对象。

地球除公转和自转的天体运动外,其内部物质(如地幔上部的软流层)也在不停地运动着,因此地球内部始终存在着驱使岩石发生变形的巨大能量,使岩石逐步积累地应力。



(a) 原始状态 (b) 开始变形 (c) 断裂错动

图 7-2 断层示意图

构造地震是由于地应力在某一地区逐渐增加,导致岩石变形也不断增加,到一定时候,在岩石比较薄弱的地方突然发生断裂错动(如图7-2),部分应变能突然释放,其中一部分能量以波的形式在地层中传播,这就产生了地震。构造地震发生断裂错动的地方形成断层,叫做发震断层,以区别于其他一些由于地震地面运动而造成的断层。构造地震常常发生在已有的断层上,这是因为这些地方既是应力集中的地方,又是岩石强度低的地方。这种学说称为断层说。

地应力的积累是一个较缓慢的过程,可经历几十年到几百年的时间,在岩石受力性质上属于“中期”受力状态。岩石呈现粘弹性性质。有时应变能会逐渐释放而不致形成地震,这时地面可有缓慢而较大的移动。岩石断裂错动是在瞬间发生的,在断裂处岩石弹性回跳(见图7-2),这就是“弹性回跳假说”。在较深处岩石处于高温高压下,试验结果表明,岩石受力后沿破坏面(一般为剪切破坏)有一系列的滑动,每次滑动伴随着应力突然降落,而不像脆性材料那样一下子完全破坏。这一现象叫做粘-滑,用它可解释预震和余震现象。在旧金山大地震(1906)中,大地在安德鲁断层上下错动达6.5m,洛马(Loma Preta, 1989)地震则发生断层最大相对位移为2m。

前 言

本书是为土木、水利、工程力学、机械专业硕士研究生的学位课程“高等结构动力学”而编写的教材。此课程旨在帮助研究生掌握结构动力学的基础理论、建模技能及分析计算方法，并能运用理论知识解决工程实际问题。

本书是在四川大学和西南交通大学有关讲义的基础上，通过较长时间(8~10年)的教学实践而逐渐修改而成。

本书以工科专业本科的力学和数学课程(理论力学、材料力学、结构力学、高等数学和工程数学)作为起点，在取材与编排上有以下的特点：①突出解决工程实际问题的能力，在重视基础理论系统性的同时，在不失严密性的前提下，着重阐述理论和方法的工程背景 and 实际应用，而不拘泥于公式的繁琐推导。②在取材上注意采纳国内外相关教材的内容和方法，尽可能反映该领域内最新成就和进展。

全书共分9章，其中前3章介绍单自由度与多自由度系统动力分析的基础知识，第4章至第6章分别介绍求解动力问题的数值解法、较深入问题的求解方法以及实用振动分析的技巧和方法。第7章、第8章分别介绍地震学基础知识及结构抗震分析的基本原理。第9章介绍结构动力学中几个前沿领域的理论和应用，包括结构隔震理论及其应用，工程减震控制理论及其应用等。

在每章之后配有习题和思考题，在书末附有部分习题的答案。

本书的前6章可以作为土木工程、力学、水利等专业的结构动力学本科教材。

本书得到了四川大学研究生教材建设基金的重点资助和四川大学建筑学院的大力支持，在此表示由衷感谢。

于建华教授与谢用九教授参与全教材的编写和修改、定稿工作，魏泳涛博士参与第2章至第6章和第8章的部分章节的编写工作，硕士谢凌志、陈颖参加部分习题解答和提示的编写，硕士研究生李金桥、曹波、冷谦参与插图绘制工作。

本书在编写和审校过程中，得到了四川大学出版社李川娜和韩果两位编辑的大力帮助。

作者希望本书能为提高研究生教学质量起到绵薄之力，由于时间和水平所限，本书定有不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正。

编者
2001年4月

第1章 结构动力学的一般概念

1.1 结构动力分析的目的

随着现代工程技术的飞速发展,各种结构的尺寸日益增大,新型结构不断出现,结构的重量日趋减小,对结构进行动力分析的要求越来越迫切。工程结构对于动力荷载如风荷载、冲击荷载、旋转机械引起的周期荷载以及地震荷载等的反应(包括位移、变形和应力等),已成为工程师们在进行结构设计时必须考虑的一个问题。近年来对结构物发生破坏的原因进行调查,可以看到,对结构物静态特性考虑不周,造成破坏的情况较少;而绝大多数情况是对于结构物动态特性考虑不周引起的破坏。研究结构动力学的目的就是要保证结构在整个使用期间,在可能发生的动力荷载作用下能够正常工作,确保它的安全、可靠。这就需要确定结构物在任意动力荷载作用下随时间变化的反应。确定结构反应的方法有两种:分析的方法和实验的方法。对于复杂结构,两种方法可以同时并用,本教材只讨论分析的方法。

在结构分析中,我们学过在静荷载的作用下结构反应(位移、变形和应力)的计算问题,这类问题称为静力问题。在静力问题中,静荷载是不随时间变化的,由它引起的结构反应也不随时间变化,因而它具有单一解,一次分析便能得到所要求的全部解答。同时,结构在承受静荷载时,因受力过程缓慢,结构质量的惯性力可忽略不计。这样,结构的静力分析问题就变得十分简单了。

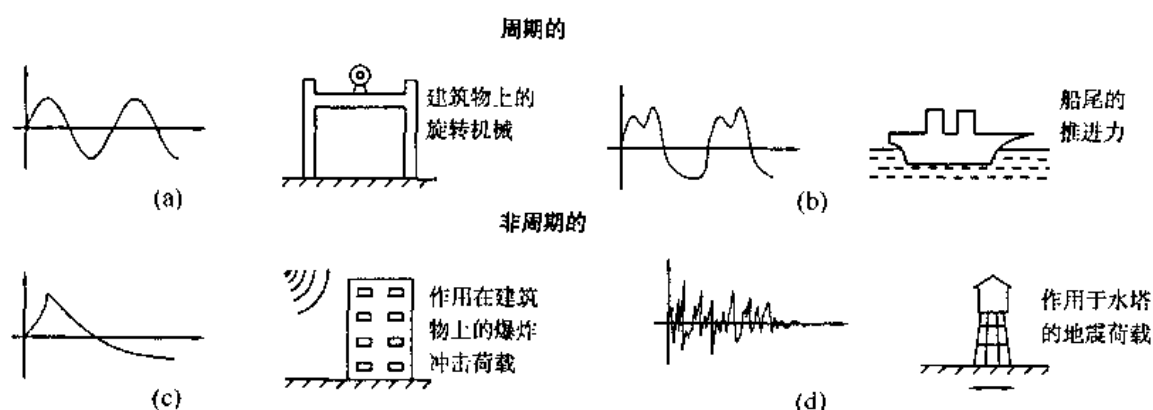
在结构动力学中,结构承受的荷载是动荷载,荷载的大小、方向和作用点都可以随时间变化。由它引起的结构的反应,亦即结构的挠度和应力,也是随时间变化的。因此不能像静力问题那样得到单一解,而必须求得反应时程中的一系列解答。同时,结构在承受动荷载时,结构上的质量是运动的,要产生抵抗加速度的惯性力。结构内部的弹性力不仅要平衡外荷载,还必须平衡由加速度引起的惯性力,这就使得结构的动力分析要比静力分析复杂得多。

结构的静力分析方法和动力分析方法在性质上是根本不同的。但在结构线弹性分析中,往往把施加荷载的静力分量和动力分量区分开来,然后分别计算结构对于每种荷载的反应,最后再将两个反应分量叠加得出总的反应。

结构动力分析的方法分为数定的和非数定的两种。在给定情况下,采用哪种方法取决于荷载的性质。如果荷载随时间的变化完全已知,无论变化多么不规则或者变化率多么大,都把这类荷载称为非随机荷载。结构在非随机荷载下的反应分析定义为数定分析。如果荷载随时间的变化不是完全已知的,但可以按统计的方法来定义,这种荷载称为随机荷载。结构在随机荷载作用下的反应分析定义为非数定分析。本教材只讨论结构的数定分析。

1.2 非随机荷载的类型

非随机荷载可以分为周期荷载和非周期荷载两种。按一定时间间隔重复其变化规律的荷载称为周期荷载。最简单的周期荷载是图1-1(a)所示的简谐荷载。这种荷载随时间的变化曲线是一条正弦曲线或者是一条余弦曲线，此类荷载是由旋转机械装置中质量的不平衡引起的。较复杂的周期荷载不能用单一的函数来表示，但如果利用傅里叶级数，这类荷载可以表示为三角函数之和。因此周期荷载下的反应分析，原则上可以按同样的标准过程进行。较复杂的周期荷载如图1-1(b)，可以由往复式机械装置中的惯性力引起或者由船尾推进器所产生的流体动压力引起。



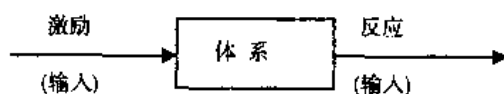
(a) 简谐荷载 (b) 复杂荷载 (c) 冲击荷载 (d) 长持续时间的荷载

图 1-1 典型动力荷载的特性及来源

非周期荷载可以是短持续时间的冲击荷载或者是长持续时间的一般形式的荷载，如图1-1(c)，(d)。爆炸引起的强大气流作用于结构是发生冲击荷载的典型例子。这种短持续时间的荷载可以用特殊的简化方法来进行分析。一般形式的长持续时间的荷载，例如由地震引起的荷载，只能用动力分析的一般方法进行分析。

1.3 三类动力问题

在动力问题中，通常把研究的对象称为体系。它可以是一个零部件，也可以是一个完整的结构。动荷载等引起体系发生振动的因素称为激励(输入)，它们作用于体系使其产生的振动运动称为反应(输出)。这三者构成了动力问题的三个要素，它们之间的关系可以用下面的框图来表示：



动力问题按欲求上述三要素中的某一个分为三类:

① 反应问题: 已知激励和体系, 求反应。这是工程中最常见、最基本的问题, 也是我们研究的主要内容。其主要目的是验算结构工作时的反应(位移、变形、应力等)是否满足预定的安全要求或其他要求。

② 识别问题: 已知激励和反应, 求体系。即识别体系的物理特性(如质量、刚度和阻尼系数等)。

③ 测量问题: 已知体系和反应, 求激励。例如利用加速度计或位移计测量由地震引起的地面运动就属于这类问题。

1.4 几种离散的方法

与结构分析相同, 结构动力学也需要进行数学抽象, 借助某种力学模型来研究。选择的模型要简单, 而且能反应真实体系的主要特征和性能。模型可分为两类: 分布参数体系和离散体系。实际工程结构的物理参数, 例如梁、板、轴等的质量及弹性一般是连续分布的, 保持这种特点抽象出来的模型仍具有无穷多个参数, 这样的模型体系称为分布参数体系。在绝大多数情况下, 为了便于分析, 往往需要通过适当的方法将分布参数体系“凝缩”为只有有限个参数的体系, 这就是离散体系。分析两种体系所采用的数学工具不同, 分布参数体系借助于偏微分方程, 而离散体系则借助于常微分方程。本教材只讨论离散体系。

由于两种体系所具有的自由度的数目不同, 分布参数体系又称为无限自由度体系; 离散体系则称为多自由度体系, 它的最简单情况是单自由度体系。注意, 这里指的是动力自由度, 即体系的自由度是要确定体系全部质量的位置所需要的独立坐标的数目。例如一个在 xy 平面内运动的质量需要三个坐标—— x 和 y 方向的平移和绕 z 轴(垂直于 xy 平面)的转角才能完全确定它的位置, 因此它是一个三自由度的体系。如果忽略转动惯性力, 把它看作一个质点, 则只有 x 和 y 两个方向的平移自由度。如果某个方向的位移再受到约束, 则变为一个单自由度体系。

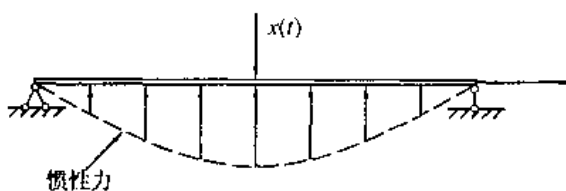


图 1-2 承受动荷载的简支梁

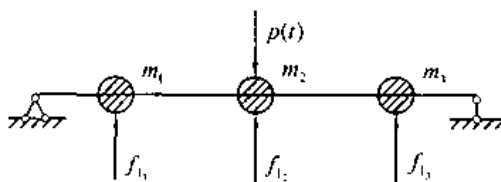


图 1-3 简支梁的集中质量理想化模型

如图1-2所示, 简支梁的质量和刚度是连续分布的, 是一个分布参数体系。每点都可以布置一个质量, 其位置至少必须用一个独立的坐标来描述, 因此体系有无穷多个自由度。为了便于分析, 需要把它“凝缩”为只有有限个自由度的离散体系。“凝缩”的过程称为离散化。离散化的方法有三种: 集中质量法、广义位移法和有限单元法。

集中质量法把结构的质量集中于一系列的离散点上, 只有这些质量点才产生惯性力, 因而只需考虑与它们有关的自由度, 使分析大为简化。图1-3就是图1-2所示简支梁的一种理想化模型。如果忽略轴向变形, 由于体系的约束, 三个质点只能在竖直方向运动, 这样体系就具有三个自由度。如果把质量看作质块, 它具有有限的转动惯量, 则需要考虑转动位移, 这样体系的自由度数不是三个而是六个(三个竖向位移和三个转动位移)。

顺便提一下, 静力问题中的自由度和前面提到的动力自由度的概念是不一样的。在静力问题中, 一个物体的自由度数定义为在不考虑应变的条件下确定该物体在空间中的位置所需要的独立参数的数目, 亦即体系的几何不变度。如图1-3所示简支梁为一个几何不变且又无多余约束的体系, 其静力自由度为零。而在动力问题中, 它却有三个或六个自由度, 因此必须区分体系的静力自由度和动力自由度数。

实际上集中质量法在处理大部分质量时, 对集中在几个离散点的结构特别有效。但是, 如果体系的质量处处都是均匀分布的, 就可利用广义位移法。它也是减少自由度的一种好方法。

广义位移法假定结构的挠曲形状可用一系列规定的位移函数 $\psi_i(x)$ 的和来表达。每一个位移函数(又称为形状函数)仅仅是位置坐标 x 的函数, 而且它必须满足结构的边界条件并保持在结构内部的连续性。所假定的位移函数的数目 n 代表所考虑的自由度数。全结构的位移表达式可写为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) Z_i(t) \quad (1-1)$$

式中 $Z_i(t)$ 称为广义坐标, 它是时间 t 的函数。作为一个简单例子, 就是用三角级数来表示图1-2所示简支梁的挠曲线, 取 $n=3$, 则

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^3 \sin \frac{i\pi x}{L} Z_i(t) \quad (1-2)$$

式中 L 为梁的长度。显然结构在某时刻的挠曲形状, 取决于该时刻广义坐标 $Z_i(t)$ 的值。

有限单元法综合了集中质量法及广义坐标法二者中的某些特点。这个方法是分析连续结构的有限元法的基础, 它提供了既方便又可靠的体系理想化模型, 对用电子计算机分析而言特别有效。

有限单元法的理想化模型适用于一切结构形式。为了简单起见, 在目前的讨论中将仅考虑一维的结构构件, 但这个方法的概念可以直接引伸到二维及三维的结构单元中去。

对任何结构, 有限单元离散的第一步是将结构分成适当数量的单元, 联结单元的端点称为节点。例如图1-4所示的梁, 其节点的位移组成结构的广义坐标, 整个结构的挠曲线可利用这些广义坐标, 并借助于一组适当的假定的位移函数, 用类似于方程(1-1)的表达式表示。但是在这种情况下, 位移函数被称为插值函数, 因为这些函数确定了指定节点位移之间的形状。例如图1-4画出了与具有二个自由度的节点3有关的插值函数, 这个节点在图平面内产生了横向位移和转角。原则上, 这些插值函数可以是内部连续并满足节点位移所带来的几何位移条件的任意曲线。对于一维单元, 用等截面梁中的节点位移所产生的曲线形状作为插值函数较为方便(它们是三次Hermite多项式, 且示于图1-4中)。

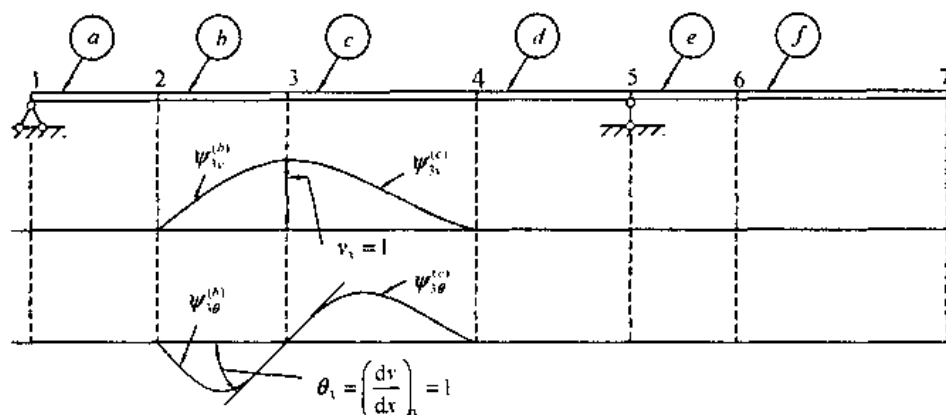


图 1-4 典型的有限单元梁坐标

因为有限单元法所用的位移函数满足广义位移法中所述的条件, 所以这种方法所用的坐标应是广义坐标的一种特殊形式, 它具有如下的优点:

- ① 只要把结构分成适当数量的单元, 即可引入所需的任意数目的广义坐标;
- ② 每一分段所选择的位移函数可以是相同的, 故计算得以简化;
- ③ 因每个节点位移仅影响其邻近的单元, 所以这个方法所导得的方程大部分是非耦合的, 因此解方程式的过程大大地简化。

1.5 动力体系运动方程建立的途径

如前所述, 数定结构动力学的首要目的是对已知结构计算它在给定的随时间变化的荷载作用下的位移—时间过程。描述动力位移的数学表达式称为结构的运动方程, 这些运动方程的解就提供了所求的位移过程。

动力体系的运动方程的建立是整个分析过程中最重要的环节。通常可用三种不同的方法建立运动方程。

1) 直接平衡法

此法的根据是达朗贝尔原理, 即质量所产生的惯性力与它的加速度成正比, 但方向相反。这样我们可以把运动方程表示为动力平衡方程。由此我们可以认为荷载包括许多个作用于质量上的力, 即抵抗位移的弹性约束力 f_s 、抵抗速度的粘滞力 f_D 、独立确定的外荷载 $p(t)$ 以及抵抗加速度的惯性力 f_I , 而运动方程的表达式可写成仅仅是作用在质量上所有力的平衡表达式

$$f_I + f_D + f_s = p(t) \quad (1-3)$$

2) 虚位移原理

如果结构体系相当复杂, 可用虚位移原理。

虚位移原理可阐述如下: 如果一个平衡的体系在一组力的作用下承受一个虚位移(即体系约束所允许的任何微小位移), 则这些力所做的总功将等于零。因此, 在建立动力体系的运动方程时, 首先要搞清作用于体系质量的所有力, 包括按达朗贝尔原理所定义的惯性

力，然后引入相应于每个自由度的虚位移，并使所作的功等于零，由此得到运动方程。

3) 哈密顿原理

哈密顿原理是应用广泛的一种变分原理，此原理可表达为：

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (1-4)$$

式中， T 为体系的总动能， V 为体系的位能，包括应变能及任何保守外力的势能， W_{nc} 为作用于体系上的非保守力（如阻尼力及任意外荷载）所作的功， δ 为在指定时间区间内所取的变分。

哈密顿原理的意义：在任意时间区间 t_1 到 t_2 内，动能和位能的变分加上所考虑的非保守力所作的功必等于零。哈密顿原理主要用于建立连续体的运动方程。若动能项 T 消失，方程 (1-4) 的积分中剩余项将不随时间变化，于是方程简化为

$$\delta(V - W_{nc}) = 0$$

这就是应用在静力分析中著名的最小位能原理。

这里，不妨将保守力及非保守力的概念复习一下：保守力系统实际上是机械能守恒的力学系统。若作用于某质点的场力所作的功只与质点的起始及终止位移有关，而与中间过程无关，此场力称为有势力或保守力，如重力、弹性力等；反之，若不符合以上定义的就是非保守力，如阻尼力、外加荷载等。

第2章 单自由度体系的振动

我们先讨论单自由度体系的振动，这是因为：

- ① 单自由度体系分析起来比较简单，但它却具有一般线性系统共有的基本特性；
- ② 某些工程结构可以简化为单自由度体系来分析；
- ③ 用广义坐标可将多自由度体系的线性结构的强迫振动简化为若干单自由度来研究。

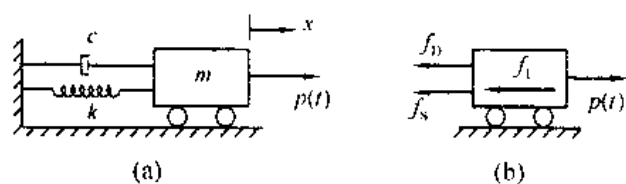
因此，单自由度体系的振动是振动理论的基础，掌握了它的分析方法就为后面章节的学习做好了准备。

2.1 运动方程的建立

分析静力问题必须建立并求解平衡方程。类似地，分析动力问题也必须建立并求解运动方程。

建立运动方程的方法很多，这里介绍三种常用的方法。

2.1.1 直接平衡法



(a) 基本元件 (b) 平衡力系
图2-1 理想化单自由度体系

理想化的单自由度体系如图2-1(a)所示，它由质量 m 、弹簧 k 和阻尼器 c 三个集中元件构成。在随时间 t 变化的动荷载 $p(t)$ 作用下，由于滚筒的约束，质量 m 只能在水平方向移动，用一个位移坐标 $x(t)$ 就可完全确定它的位置，因此它是一个单自由度体系。

质量在运动过程中，各元件都要产生相应的力作用于体系。这些力是抵抗位移的弹性力 f_s ，抵抗速度的阻尼力 f_D 和抵抗加速度的惯性力 f_I ，它们的方向分别与位移、速度和加速度的方向相反。规定速度和加速度的正方向均与位移的方向相同，用这些力来替代相应的元件，并按各个力的正方向标出，得到图2-1(b)所示平衡力系。由力的平衡关系可知

$$f_I + f_D + f_s = p(t) \quad (2-1)$$

由虎克定律，弹性力等于弹簧刚度 k 与位移的乘积

$$f_s = kx \quad (2-2a)$$

假定阻尼是粘滞性的，阻尼力等于阻尼常数 c 与速度的乘积

$$f_D = c\dot{x} \quad (2-2b)$$

由达朗贝尔原理，惯性力等于质量与加速度的乘积

$$f_I = m\ddot{x} \quad (2-2c)$$

将以上三式代入(2-1)式，得单自由度体系的运动方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (2-3)$$

这里，圆点“ \cdot ”表示对时间 t 的导数。

显然，方程(2-3)是力的平衡方程，称为作用力方程或动力平衡方程。对于能直接找到平衡关系的简单体系来说，用直接平衡法是十分方便的。方法的特点是应用达朗贝尔原理，在质量上假想地加上惯性力，然后当作静力平衡问题来处理，因此有些书上又称为“动静法”或“惯性力法”。

设使弹簧产生单位变形所需施加的静力为 k ，而在单位静力作用下，设弹簧的伸缩量为 \tilde{f} 。 k 和 \tilde{f} 分别称为弹簧的刚度和柔度，两者之间有以下关系

$$k = \frac{1}{\tilde{f}} \quad (2-4)$$

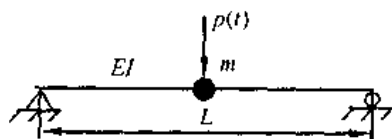


图 2-2 承受集中荷载的简支梁

若以图2-2所示的简支梁为例，设该梁为等截面的，其弯曲刚度为 EI ，梁的中点作用一集中荷载 $p(t)$ ，梁的质量简化为 midpoint 质量 m ，根据柔度的定义，可知

$$\tilde{f} = \frac{L^3}{48EI}, \quad k = \frac{48EI}{L^3}$$

若不考虑运动过程的阻尼，则简支梁的运动方程为

$$m\ddot{x} + \frac{48EI}{L^3}x = p(t) \quad (2-5)$$

为便于读者参考，我们将直杆系统几种常见变形情况下的柔度和刚度示于表2-1。

表2-1 几种常见直杆变形的柔度和刚度(仅考虑弯矩作用)

直杆变形				
柔度	$\frac{h^3}{3EI}$	$\frac{h^3}{12EI}$	$\frac{h^3}{8EI} (wh=1)$	$\frac{h^3}{12E(I_1+I_2)}$
刚度	$\frac{3EI}{h^3}$	$\frac{12EI}{h^3}$	$\frac{8EI}{h^3}$	$\frac{12E(I_1+I_2)}{h^3}$
直杆变形				
柔度	$\frac{L^3}{48EI}$	$\frac{5L^3}{384EI} (wL=1)$	$\frac{L^3}{192EI}$	$\frac{L^3}{384EI} (wL=1)$
刚度	$\frac{48EI}{L^3}$	$\frac{384EI}{5L^3}$	$\frac{192EI}{L^3}$	$\frac{384EI}{L^3}$

2.1.2 虚功分析

仍以图2-1(a)的系统为例，作用于质量 m 上的力示于图2-1(b)。若给 m 以一个虚位移

δx ，则每一个力都将作功，体系所作的总功可写为

$$-f_1\delta x - f_D\delta x - f_S\delta x + p(t)\delta x = 0$$

式中的负号是由于力的方向和位移的方向相反产生的，将方程(2-2)各式代入以上方程并提公因子 δx ，即得

$$[-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + p(t)]\delta x = 0 \quad (2-6)$$

因为 δx 不等于零，方程(2-6)则可变为方程(2-3)的形式。

2.1.3 哈密顿原理的应用

根据定义，体系的动能 T 及弹簧的应变能 U 可分别写为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (2-7a)$$

$$V = U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2-7b)$$

而体系的非保守力为作用于其上的荷载 $p(t)$ 及阻尼力 f_D ，这些力所作功的变分为

$$\delta W_{nc} = p(t)\delta x - c\dot{x}\delta x \quad (2-7c)$$

将(2-7)的各式代入(1-4)式，对第一项进行变分并经整理后可得

$$\int_{t_1}^{t_2} [m\dot{x}\delta\dot{x} - c\dot{x}\delta x - kx\delta x + p(t)\delta x] dt = 0 \quad (2-8)$$

利用第一项变分的分部积分，注意到变分 δx 在积分限 t_1, t_2 时为零，可得

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + p(t)]\delta x dt = 0 \quad (2-9)$$

因为变分 δx 的任意性，其括号内的表达式等于零应该成立。

2.2 重力的影响

将图2-1(a)所示体系旋转 90° ，得图2-3(a)所示体系，这时，重力就沿位移方向作用了。作用于体系上的力如图2-3(b)所示，利用(2-2)式的三个关系，体系的平衡方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) + W \quad (2-10)$$

式中， $W = mg$ 为刚块所受的重力。

假定由重量 W 引起的静位移为 x_{st} ，质量相对于平衡位置的动位移为 \bar{x} 。如图2-3(c)所示，总的位移可表示为

$$x = x_{st} + \bar{x} \quad (2-11)$$

相应的弹簧力为

$$f_S = kx = kx_{st} + k\bar{x} \quad (2-12)$$

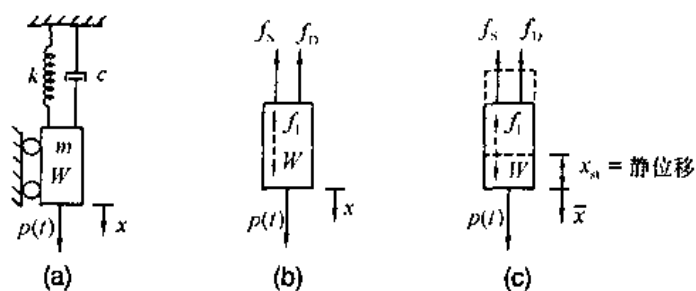
将上式代入(2-10)式，并注意到 $kx_{st} = W$ ，得

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\bar{x} = p(t) \quad (2-13)$$

将方程(2-11)对时间 t 求导，注意到静位移 x_{st} 是不随时间变化的，因此有 $\dot{x} = \dot{\bar{x}}$ 和 $\ddot{x} = \ddot{\bar{x}}$ 。

把这两个关系代入(2-13)式得

$$m\ddot{\bar{x}} + c\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = p(t) \quad (2-14)$$



(a) 基本元件 (b) 平衡力系 (c) 消除重力影响

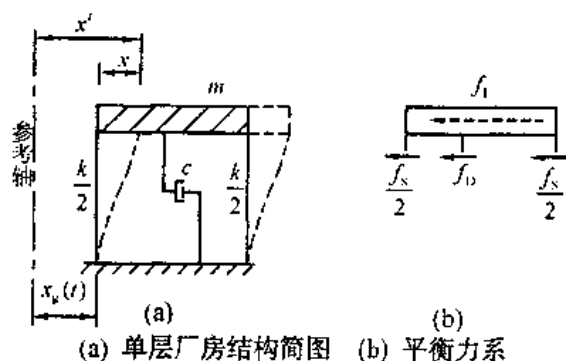
图 2-3 重力对单自由度体系平衡的影响

比较(2-14)式和(2-3)式,可以发现:在重力的作用下,相对静力平衡位置的运动方程与无重力作用的运动方程具有相同的形式。因此,如果以静力平衡位置为基准建立运动方程式,就不必考虑重力的影响了。但是,在计算总的反应时,应将相应的静力分量叠加进去。

由于上述原因,在2.1节中,建立简支梁的运动方程时,均未考虑重力的影响,而是以相对于静力平衡位置的动位移作为基本变量来建立运动方程的。今后我们也采取相同的处理办法。值得注意的是,当求总挠度及总应力等量时,必须将动力分析的结果与相应的静力分析的结果相加。

2.3 支座扰动的影 响

不仅动荷载会引起结构振动,结构支座的运动也会引起结构发生振动,地震是引起这类振动的典型例子。



(a) 单层厂房结构简图 (b) 平衡力系

图 2-4 支座扰动对单自由度体系平衡的影响

图2-4(a)表示一个单层厂房的结构简图。设水平梁的刚度比柱的刚度大得多,以致可以把梁的刚度 EI 看成无穷大,即把梁看作是刚性杆。假定柱脚嵌固在基础中,屋面及一部分柱子的质量集中于水平横梁上,而其余一部分柱子的质量则集中于柱脚。因此,可把柱子看成是无重杆,柱的压缩变形不计。两根柱子对水平相对位移的抗剪刚度相同,各为 $0.5k$;横梁相对于地面作水平移动时的阻尼为 c ,如图示。设地面相对于固定参考轴的位移 $x_g(t)$ 为已知,其正向和横梁相对于地面位移 $x(t)$ 的正向也示于图中。用 x' 来表示质量相对于固定参考轴的位移,即总位移。由图2-4(a)可得

$$x' = x + x_g \quad (2-15)$$

取图2-4(b)所示隔离体,作用于隔离体上的力包括真实力 f_d 及 f_s 和按达朗贝尔原理确定的惯性力 f_1 。这些力构成平衡力系,于是有

$$f_1 + f_d + f_s = 0 \quad (2-16)$$

式中,阻尼力 f_d 和弹性力 f_s 与相对位移 x 有关,可以用(2-2)式来确定,但惯性力 f_1 与总位移 x' 有关,即

$$f_1 = m\ddot{x}' \quad (2-17)$$

因此(2-16)式变为

$$m\ddot{x}' + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2-18)$$

将(2-15)式对 t 微分两次, 代入上式, 运动方程成为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g(t) = p_{\text{eff}}(t) \quad (2-19)$$

在上面方程中, $p_{\text{eff}}(t)$ 表示由支座扰动引起的等效动荷载。与(2-3)式相比, 在地面加速度 $\ddot{x}_g(t)$ 作用下, 结构的运动方程与在外荷载 $p(t)$ 作用下的运动方程具有相同的形式, 但此时由地面加速运动引起的地震力(等效动荷载)为 $-m\ddot{x}_g(t)$ 。事实上, 地震扰动的输入方向是不定的, 因此加不加负号都无关紧要。

2.4 广义单自由度体系

以上讨论中涉及的单自由度体系的构造很简单。在实际应用中, 有一类结构, 其构造及模型看起来很复杂, 但经过仔细分析, 它们仍可归结为单自由度情况, 这就是所谓的广义单自由度体系。而广义单自由度体系又可细分为两种类型: 刚体集合型和分布柔度型。对于这两种情况, 通常假定只允许有某种单一形式的位移, 从而迫使结构的性质及状态像单自由度体系一样。

2.4.1 刚体集合型的广义单自由度体系

在刚体集合型结构中, 所允许的单一位移形式常常由刚体集合的构造所决定。换言之, 若干个刚体组成的结构, 由于受到支承和铰的约束, 最终仅允许发生一种位移。

在建立刚体集合的运动方程时, 结构的弹性和阻尼集中在各个元件上。当各元件对应的位移和速度确定后, 便可建立相应的弹性力和阻尼力的表达式。同样, 当某点有集中质量时, 通过几何关系求得该点的加速度后, 也可建立相应的惯性力表达式。但是, 对于具有分布质量的质块来说, 其惯性力分布在整个质块中(包括平移和转动的惯性力)。为了计算方便, 往往假定质块的质量和惯性矩都集中在质心处, 当求得质心的平移加速度和旋转加速度后, 便可确定相应的惯性力。就刚体集合特性而言, 惯性力的合力与分布惯性力等效。同样, 分布的外荷载可用它们的合力替代。

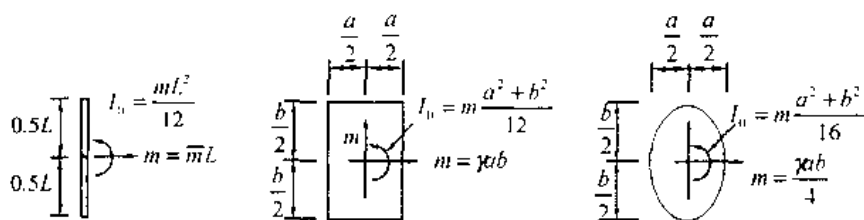


图 2-5 刚体质量和质量惯性矩

图2-5示出均质杆、矩形和椭圆形均质板刚体质量和质量惯性矩的计算方法, 图中 \bar{m} 和 γ 分别表示单位长度和单位面积上的质量。为便于计算其惯性力, 可只计算质心处的惯性力, 而质心处的平动和转动惯性力对应的广义质量分别为 m 和 I 。

例2-1 如图2-6所示某结构由两根刚杆(一根质量为 \bar{m} , 一根无重)及集中质量 m_2 , 弹

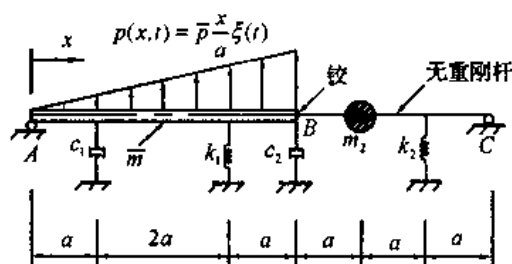


图 2-6 刚体集合单自由度体系例子

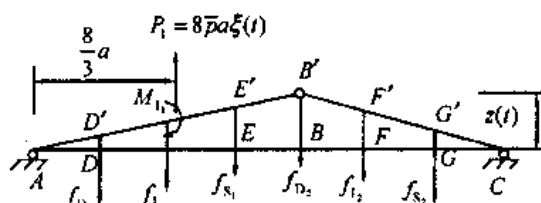


图 2-7 单自由度位移及合力

簧 k_1, k_2 , 阻尼 c_1, c_2 共7个元件组成。试用虚功分析建立运动方程, 设可能位移如图2-7。

[解] 以铰B处的上下运动 $z(t)$ 为基本量, 经分析, 作用于结构的各力及相应的虚位移示于表2-2。

表2-2 作用于图2-6结构的各力及相应的虚位移

作用于结构的力 f_i	相应的虚位移
$f_{S_1} = 0.75k_1 z(t)$ ↓	$\delta_{S_1} = 0.75\delta z$ ↑
$f_{S_2} = \frac{1}{3}k_2 z(t)$ ↓	$\delta_{S_2} = \frac{1}{3}\delta z$ ↑
$f_{D_1} = 0.25c_1 z(t)$ ↓	$\delta_{D_1} = 0.25\delta z$ ↑
$f_{D_2} = c_2 z(t)$ ↓	$\delta_{D_2} = \delta z$ ↑
集中质量惯性力 $f_{I_1} = \frac{2}{3}m_2 \ddot{z}(t)$ ↓	$\delta_{I_1} = \frac{1}{3}\delta z$ ↑
杆AB惯性合力 $f_{I_2} = 2a\bar{m}\ddot{z}(t)$ ↓	$\delta_{I_2} = 0.5\delta z$ ↑
杆AB惯性合力矩 $M_{I_1} = I_1 \ddot{\phi}(t)$ ↓	$\delta_{M_{I_1}} = \frac{\delta z}{4a}$ ↑
分布外力的合力 $P_1(t) = 8\bar{p}a\xi(t)$ ↑	$\delta_{P_1} = \frac{2}{3}\delta z$ ↑

将作用于该结构上的各力的虚功相加, 可得

$$\delta W = 0$$

$$P_1 \delta_{P_1} - (f_{S_1} \delta_{S_1} + f_{S_2} \delta_{S_2} + f_{D_1} \delta_{D_1} + f_{D_2} \delta_{D_2} + f_{I_1} \delta_{I_1} + f_{I_2} \delta_{I_2} + M_{I_1} \delta_{M_{I_1}}) = 0$$

经整理可得

$$M^* \ddot{z}(t) + C^* \dot{z}(t) + K^* z(t) = P^*(t)$$

其中, 广义质量 M^* 、广义阻尼 C^* 、广义刚度 K^* 及广义荷载 $P^*(t)$ 分别为

$$M^* = \frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}m_2, \quad C^* = \frac{1}{16}c_1 + c_2,$$

$$K^* = \frac{9}{16}k_1 + \frac{k_2}{9}, \quad P^*(t) = \frac{16}{3}\bar{p}a\xi(t)$$

2.4.2 分布柔度型广义单自由度体系的近似求解——瑞利法

某些结构实际上具有无限个动力自由度,但当我们对这些结构给出一个适当变形假设后,则这些结构可近似地用解单自由度系统的方法求解。这种近似解法称为瑞利法。下面以图2-8所示的悬臂塔为例加以说明。

已知:

- ① 弯曲刚度为 $EI(x)$, 质量为 $m(x)$;
- ② 受地震地面运动 u_g 及顶部不变的竖直荷载 N 作用。

试求:

- ① 建立运动方程;
- ② 求临界屈服荷载。

[解] ① 悬臂塔的运动 $u(x, t)$ 可表示为

$$u(x, t) = \psi(x) \cdot z(t) \quad (a)$$

其中, $\psi(x)$ 为设定的形状函数, $z(t)$ 为广义坐标。

② 由哈密顿原理

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt = 0 \quad (b)$$

其中

$$\text{动能 } T = 0.5 \int_0^L m(x) [\dot{u}'(x, t)]^2 dx \quad (c)$$

$$\text{弯曲势能 } V_1 = 0.5 \int_0^L EI(x) [u''(x, t)]^2 dx \quad (d)$$

$$\text{压缩势能 } V_2 = Ne(t) = -0.5N \int_0^L [u'(x, t)]^2 dx \quad (e)$$

③ 将(c)、(d)、(e)代入(b), 注意到 $u' = u + u_g$, 并经整理及分部积分可得

$$\int_{t_1}^{t_2} [M^* \ddot{z} + \bar{K}^* z - K_G^* z - P_{\text{eff}}^*(t)] z dt = 0$$

故有

$$M^* \ddot{z} + \bar{K}^* z = P_{\text{eff}}^*(t) \quad (f)$$

其中

$$\text{广义质量 } M^* = \int_0^L m(x) \psi^2(x) dx$$

$$\text{广义刚度 } \bar{K}^* = K^* - K_G^* = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx - N \int_0^L [\psi'(x)]^2 dx$$

$$\text{广义荷载 } P_{\text{eff}}^* = -\ddot{u}_g \int_0^L m(x) \psi(x) dx$$

④ 令 $\bar{K}^* = 0$ 可得压缩力的临界屈服值为

$$N_{\text{cr}} = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L [\psi'(x)]^2 dx}$$

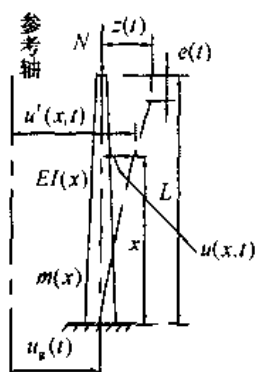


图 2-8 分布柔度型的广义单自由度体系

若取 $\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$ ，不难得出

$$M^* = 0.228\bar{m}L, K^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3}, P_{\text{eff}}^*(t) = 0.364\bar{m}L\ddot{u}_g(t)$$

若不考虑轴力 N ，则该体系的运动方程为

$$0.228\bar{m}L^4\ddot{z} + 0.03125E\pi^4 z = 0.364\bar{m}L^4\ddot{u}_g(t)$$

2.5 自由振动反应

将广义单自由度体系的运动方程与简单单自由度体系的运动方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

进行比较，两者具有相同的形式，其区别在于简单单自由度体系的各物理量和未知函数 $x(t)$ 具有直观的物理意义，而广义单自由度体系是以广义的物理特性和广义位移 $z(t)$ 来表述的。因此，两个方程的解具有相同的形式，但讨论方程(2-3)的解是比较直观和方便的。

自由振动指的是施加于体系的外荷载 $p(t) = 0$ 时，由体系的初始位移或初始速度引起的振动。例如，用外力迫使图2-1(a)所示的质量偏离平衡位置即具有初始位移，然后突然释放，此时体系产生的振动就是自由振动。体系发生自由振动时，其运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2-20)$$

(2-20)式是二阶齐次线性的常微分方程。

设方程(2-20)的通解为指数函数

$$x(t) = Ge^{\lambda t} \quad (2-21)$$

式中， G 和 λ 为待定常数。将上式代入方程(2-20)，整理得

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)Ge^{\lambda t} = 0$$

两边除以 $mGe^{\lambda t}$ ，并引入记号

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (2-22)$$

得特征方程

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \omega^2 = 0 \quad (2-23)$$

(2-23)式是关于 λ 的二次代数方程，可求得相应的两个特征根 λ_1 和 λ_2 ，这两个根的值都依赖于阻尼系数 c 的值。将这两个根代入(2-21)式，可得到位移反应的通解表达式

$$x(t) = G_1 e^{\lambda_1 t} + G_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2-24)$$

式中， G_1 和 G_2 为由体系的初始条件决定的待定常数。显然体系的位移反应也依赖于体系的阻尼值。下面我们分两种情况加以讨论。

2.5.1 无阻尼自由振动

如果体系没有阻尼，即 $c = 0$ ，特征方程(2-23)为

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

相应的特征根

$$\lambda_1 = i\omega, \quad \lambda_2 = -i\omega$$

式中, $i = \sqrt{-1}$ 为单位虚数。将这两个特征根代入(2-24)式, 得到位移反应的通解

$$x(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t}$$

利用欧拉方程

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t \quad (2-25)$$

可将位移反应写为实函数形式, 即

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2-26)$$

式中, A 和 B 为新的待定常数, 可由初始条件确定。将(2-26)式对时间 t 求导, 得到反应的速度表达式

$$\dot{x}(t) = A \omega \cos \omega t - B \omega \sin \omega t \quad (2-27)$$

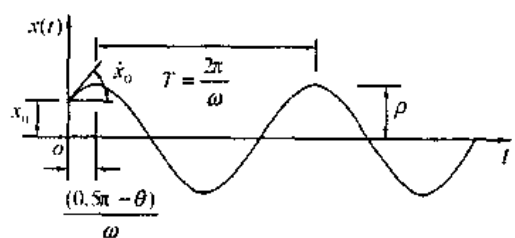


图 2-9 无阻尼自由振动反应

设 $t = 0$ 时, 体系的初始位移 $x(0) = x_0$, 初始速度 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ 。将它们代入(2-26)和(2-27)两式, 可解得 $B = x_0$, $A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$ 。因此无阻尼单自由度体系的自由振动反应为

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \quad (2-28)$$

由上式可见, 无阻尼单自由度体系的位移反应是以平衡位置为中心的简谐运动(SHM)。它包括两部分: 一部分与 $\cos \omega t$ 成正比, 其值与体系的初位移 x_0 有关; 另一部分与 $\sin \omega t$ 成正比, 其值与体系的初速度 \dot{x}_0 有关。这两部分都是简谐运动, 其合成运动如图2-9所示, 也是一个简谐运动。

引入下述变换

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \rho \sin \theta \\ \frac{\dot{x}_0}{\omega} &= \rho \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

可将(2-28)式化简为一个三角函数的形式

$$x(t) = \rho (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) = \rho \sin(\omega t + \theta) \quad (2-30)$$

式中

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} \quad (2-31a)$$

称为振幅, 表示质量偏离平衡位置的最大位移, 其值的大小表征体系振动的强弱; $\omega t + \theta$ 为相位角, θ 称为初相角, 它们的单位均为 rad (弧度)。初相角由下式确定

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} \right) \quad (2-31b)$$

质量的运动每重复一次的时间称为周期, 以 T 表示。在简谐运动的情况下, 每经过一个周期, 相位角增加 2π , 即

$$[\omega(t+T) + \theta] - (\omega t + \theta) = 2\pi$$

因此

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2-32)$$

单位时间内运动重复的次数称为频率, 记作 f , 频率和周期互为倒数, 即

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-33)$$

简谐运动的圆频率

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2-34)$$

它表示 2π 时间内运动重复的次数, 称为固有圆频率或固有频率。结构动力学中经常用到这个物理量, 为了方便, 以后也将 ω 简称为频率。其单位为 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, 或简记为 s^{-1} 。

由(2-34)式可见, 频率 ω 只同体系的物理量(质量、刚度系数)有关, 而与初始条件无关。频率 ω 、振幅 ρ 、初相角 θ 是体系振动的重要物理参数, 常称为振动三要素。这三个物理参数一旦确定, 则体系的简谐运动就完全确定了。

2.5.2 有阻尼自由振动

如果体系存在阻尼, 即 $c \neq 0$, 特征方程(2-23)的解为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2-35)$$

位移反应的通解由(2-24)式给出。体系的振动特性与(2-35)式右边根式的值有关, 现讨论如下。

首先引入临界阻尼的概念。所谓临界阻尼 c_c 是指使(2-35)式中根式为零的那个阻尼系数, 即

$$c_c = 2m\omega = 2\sqrt{km} \quad (2-36)$$

引入无量纲阻尼比 ξ , 它表示体系的实际阻尼与临界阻尼之比, 即

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2-37a)$$

这样阻尼系数又可写为

$$c = \xi c_c = 2m\omega\xi \quad (2-37b)$$

将(2-37a)式代入(2-35)式, 得

$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})\omega \quad (2-38)$$

下面就 $\xi < 1.0$, $\xi = 1.0$ 和 $\xi > 1.0$ 三种情况加以讨论。

1) 低阻尼体系

当 $\xi < 1.0$, 即体系的阻尼小于临界阻尼($c < 2m\omega$)时, 称为低阻尼体系, 其特征根为

$$\lambda_{1,2} = (-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})\omega \quad (2-39a)$$

令

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2-40)$$

ω_D 表示有阻尼体系的振动圆频率，称为阻尼振动频率。通常结构的阻尼比 ξ 小于 0.20，因此阻尼频率 ω_D 和无阻尼频率 ω 的差别是很小的。

将(2-40)式代入(2-39a)式，则特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D \quad (2-39b)$$

由(2-24)式，低阻尼体系位移反应的通解为

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t})$$

利用欧拉方程(2-25)，上式可写为更简便的形式

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2-41)$$

设体系的初始条件为 $x(0) = x_0$ ， $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ ，并利用上式及其对时间 t 的导数，可定出

$$A = \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}, \quad B = x_0$$

将这两个常数代回(2-41)式，得

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega_D t \right] \quad (2-42)$$

与无阻尼情况相类似，令

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} &= \rho \cos \theta \\ x_0 &= \rho \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-43)$$

可将(2-43)式化简为三角函数的形式

$$x(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t + \theta) \quad (2-44)$$

式中

$$\rho = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \right)^2 \right]^{0.5} \quad (2-45a)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega_D x_0}{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0} \right) \quad (2-45b)$$

现在比较一下无阻尼体系和有阻尼体系的自由振动反应：(2-30)式表明，无阻尼体系发生自由振动时，质量是以圆频率 ω 在其平衡位置附近作往复运动，运动幅值始终保持不变，这说明体系没有能量的损耗；而(2-44)式表明，有阻尼体系发生自由振动时，质量是以不变的圆频率 ω_D 在其平衡位置附近作往复运动，运动的幅值是按指数函数规律衰减，这说明阻尼力不断地消耗能量，使振动逐渐减弱，直到完全消失。

可用任何方法起振，最简单的方法是施加外力迫使质量偏离平衡位置，然后突然释放，使结构发生振动。这时体系发生的振动便是初始位移 $x(0) = x_0$ ，初始速度 $\dot{x}(0) = 0$ 的自由振动。

在此情况下，当 $t = 0$ 时，位移达到极大值即 $x_{\max} \approx x_0$ ；(2-44)式中的正弦函数也达到极大值，即 $\sin(\omega_D \cdot 0 + \theta) = 1$ ，因此 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，从而位移反应为

$$x(t) = \rho e^{-\xi \omega t} \sin\left(\omega_D t + \frac{\pi}{2}\right) = \rho e^{-\xi \omega t} \cos \omega_D t \quad (a)$$

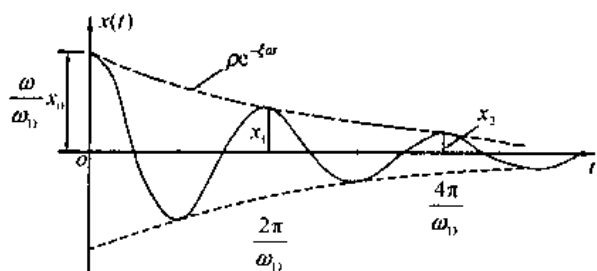


图 2-10 低阻尼体系自由振动反应

图2-10给出了上述情况下低阻尼体系的自由振动反应曲线。

实际结构的真实阻尼很复杂，通常只能用实验方法来确定。最简单的实验方法是测量阻尼体系任意两个相邻正波峰的位移值 x_n 和 x_{n+1} ，即 $t = \frac{2n\pi}{\omega_D}$ 和 $t = \frac{2(n+1)\pi}{\omega_D}$ 两个时刻的位移值，然后利用(a)式，可求出相邻峰值之比为

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \exp\left(2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D}\right) \quad (2-46)$$

两边取自然对数，得对数衰减率 δ

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \quad (2-47)$$

引入方程(2-40)后得

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2-48)$$

对小阻尼体系，对数衰减率可近似为

$$\delta \approx 2\pi\xi \quad (2-49)$$

在小阻尼条件下，方程(2-46)可展开为级数

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^\delta \approx e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi + \frac{(2\pi\xi)^2}{2!} + \dots \quad (2-50)$$

当 ξ 较小时，仅保留级数(2-50)式前两项就可以获得足够的精度。因此

$$\xi \approx \frac{x_n - x_{n+1}}{2\pi x_{n+1}} \quad (2-51)$$

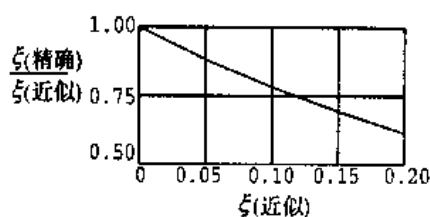


图 2-11 阻尼比修正系数

上式只能得到近似的阻尼比 ξ (近似)。为了求得精确的阻尼比 ξ (精确)，可用图2-11给出的阻尼比修正系数来加以修正。例如，若用(2-51)式算得 ξ (近似) 为 0.12，查图2-11知，此时 ξ (精确) 值与 ξ (近似) 值的比值为 0.75，因此 ξ (精确) 值为 0.09。

当阻尼较小，振幅衰减较慢时，取相隔几周(例如 j 周)的位移峰值来计算阻尼比可提高精度。这时(2-47)

式变为

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+j}} = 2j\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \quad (2-52)$$

而阻尼比可近似地表示为

$$\xi \approx \frac{x_n - x_{n+j}}{2\pi j x_{n+j}} \quad (2-53)$$

在工程结构的计算中, 阻尼比 ξ 常可采用工程图表所建议的数据, 如表2-3。

表2-3 若干工程结构材料的阻尼比值

结构类型	混凝土框架结构			钢框架结构			木框架及 剪切墙
	柔性内墙	砼及砖制的 剪切墙	柔性内墙 外包材料	焊接结点 柔性墙	焊接结点楼 板外包材料	铰接楼板 外包材料	
阻尼比 ξ	0.05	0.10	0.07	0.02	0.05	0.10	0.15

本表摘自“Seismic Design of Building Structure”, 6th edition, Michael R. Lindeburg, PE

为了计算方便, 需先讨论结构动力学几个常用物理量的单位。在结构动力学所涉及的国际单位制中, 长度、质量、时间为基本单位, 其余量均为导出单位。按国际单位制, 长度的单位为m(米), 质量的单位为kg(千克), 时间的单位为s(秒)。相应地, 位移的单位为m, 速度的单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 加速度的单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; 力的单位为N(牛顿)且 $1\text{N} = 1\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, 重量理解为重力, 具有力的单位; 刚度 k 的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, 刚度的倒数为柔度, 其单位为 $\text{m} \cdot \text{N}^{-1}$; 阻尼系数 c 的单位为 $\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ 。为了简化数字的书写, 把力的单位写为kN(千牛), $1\text{kN} = 10^3 \text{N}$; 把长度单位写为cm(厘米), $1\text{cm} = 10^{-2} \text{m}$ 。在应用中, 应注意单位的换算。

若刚度单位取为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, 质量单位取为kg, 按(2-22)式 $\omega^2 = \frac{k}{m}$, 其单位为 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} = (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} = \text{s}^{-2}$, 因此圆频率 ω 的单位为 s^{-1} 或 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

例2-2 一单层建筑物被理想化为图2-12所示的无重柱子支承的刚性横梁。为了确定结构的动力特性, 对它进行自由振动实验。当千斤顶给横梁施加的外力 $p = 90 \text{kN}$ 时, 测得横梁偏离平衡位置的位移 $x_0 = 0.5 \text{cm}$ 。若突然释放, 结构便产生自由振动。观察到结构往复摆动的周期为 1.4s , 第一周期的最大正位移 $x_1 = 0.4 \text{cm}$ 。根据这些数据计算结构的动力特性。

[解] ① 求横梁的等效重量 W 。

本例的荷载是缓慢施加的, 在外力作用期间是一个静力问题, 其平衡方程为 $kx_0 = p$, 因此两根立柱的总刚度

$$k = \frac{p}{x_0} = 1.80 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

如图示, 横梁的等效重 $W = mg$ 。这里 m 为横梁的等效质量, $g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 为重力加速度。利用(2-32)式,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}}$$

从上式解出 W , 将已知数据代入得

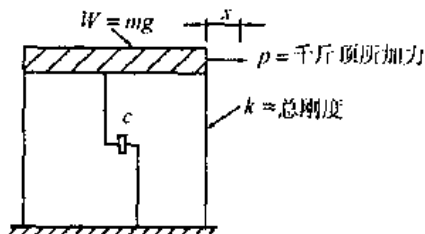


图 2-12 一个简单建筑物的振动实验

$$W = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 k \cdot g = \left(\frac{1.40}{2\pi} \right)^2 \times 1.80 \times 9.81 \times 10^4 = 8.77 \times 10^3 \text{ kN}$$

② 求振动频率。

由(2-33)和(2-34)两式, 有

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.40} = 0.714 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 4.488 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

③ 求阻尼特性。

利用已知数据, 由(2-47)、(2-49)、(2-37b)和(2-40)四式, 可得

$$\text{对数衰减率: } \delta = \ln \frac{x_0}{x_1} = \ln \frac{0.5}{0.4} = 0.223$$

$$\text{阻尼比: } \xi = \frac{\delta}{2\pi} = 3.55\%$$

$$\text{阻尼系数: } c = \xi c_c = 2\xi m\omega = 0.0355 \times \frac{2 \times 8.77 \times 10^3}{9.81} \times 4.488 = 2.85 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{阻尼频率: } \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 4.485 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \approx \omega$$

④ 求第6周的振幅。

由(2-52)和(2-46)两式, 有

$$\frac{x_n}{x_{n+j}} = \exp\left(2j\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D}\right) = \left[\exp\left(2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D}\right)\right]^j = \left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^j$$

所以

$$x_{n+j} \approx \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^j \cdot x_n$$

当 $n=0$, $j=6$ 时, 有

$$x_6 \approx \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^6 \cdot x_0 = 0.131 \text{ cm}$$

2) 临界阻尼体系

当 $\xi = 1.0$, 即体系的阻尼等于临界阻尼($c = c_c = 2m\omega$)时, 称为临界阻尼体系。由方程(2-38)确定的特征根为两重根

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega \quad (2-54)$$

由微分方程知, 这时运动方程(2-24)的通解为

$$x(t) = (G_1 + G_2 t) e^{-\omega t} \quad (2-55)$$

假定体系的初始条件为 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ 。利用上式及其对时间 t 的导数, 可定出待定常数 G_1 和 G_2 。由此得临界阻尼体系位移反应的表达式

$$x(t) = e^{-\omega t} [x_0(1 + \omega t) + \dot{x}_0 t] \quad (2-56)$$

方程(2-56)的曲线如图2-13所示。从该图可以看

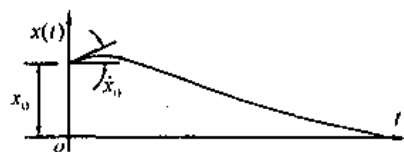


图 2-13 临界阻尼体系的自由振动反应

出, 临界阻尼体系自由振动的位移反应不包含在平衡位置附近的振动, 而是按照指数函数的规律衰减, 最后回复到零点。事实上临界阻尼是在自由反应中不出现振动的最小阻尼值。

3) 超阻尼体系

当 $\xi > 1.0$, 即体系的阻尼大于临界阻尼 ($c > 2m\omega$) 时, 称为超阻尼体系。此时特征根由 (2-38) 式给出, 它们是不含虚数项的两个负实根。位移反应的解为

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left(G_1 e^{\omega t \sqrt{\xi^2 - 1}} + G_2 e^{-\omega t \sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \quad (2-57)$$

式中, G_1 和 G_2 由初始条件确定, 其反应曲线与图 2-13 相似, 质量不会在平衡位置附近作往复运动, 位移反应逐渐减小到零。但是由于阻尼比增大, 返回平衡的速度变得更慢。

2.6 在简谐荷载作用下的反应

从本节起开始讨论单自由度体系的强迫振动。所谓强迫振动是指体系在随时间改变的外荷载作用下, 在荷载持续时间内的振动。外荷载包括直接作用于质量上的动荷载 $p(t)$ 和由于支座扰动引起的等效动荷载 $p_{\text{eff}}(t)$ (见 2.3 节)。

由 2.1 节知, 任何复杂体系, 当 $p(t) \neq 0$ 时, 其运动方程总可以写为微分方程 (2-3)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

微分方程 (2-3) 的通解为其对应的齐次方程 (2-20) 的通解 $x_c(t)$ 和它本身的一个特解 $x_p(t)$ 的线性组合

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \quad (2-58)$$

事实上, $x_c(t)$ 就是在 2.5 节中讨论的自由振动反应。对无阻尼体系它由 (2-26) 式给出

$$x_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2-59)$$

对于阻尼体系, 它由 (2-41) 式给出

$$x_c(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2-60)$$

对这两种情况, 都只需要讨论方程 (2-3) 的特解 $x_p(t)$, 然后与相应的通解 $x_c(t)$ 叠加, 再由体系的初始条件定出待定系数 A 和 B , 就得到相应的强迫振动的位移反应表达式, 这是分析单自由度体系强迫振动的主要过程。

简谐荷载 $p(t) = p_0 \sin \omega t$ 是最简单的一种周期荷载。这里 p_0 为荷载幅值, 与时间 t 无关; ω 为动荷载的圆频率, 例如旋转机械运转时引起的不平衡力就属于这种荷载。虽然在实际中简谐荷载存在的场合较少, 但它揭示的一些规律和特性具有普遍意义, 是分析研究更一般、更复杂振动问题的基础, 为此我们先讨论这种荷载引起的强迫振动。

在简谐荷载作用下, 体系的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p_0 \sin \omega t \quad (2-61)$$

由 (2-60) 式可见, 在低阻尼情况下方程 (2-61) 的通解项 $x_c(t)$ 是按指数函数规律衰减的振动, 振动的频率只与体系本身的物理特性有关, 而与荷载的性质无关。这一项只在振动开始的一段时间内才有意义, 因此称为瞬态反应。在下面的讨论中我们将看到, 方程 (2-61) 的特解项 $x_p(t)$ 是与荷载 $p(t)$ 同频率且同时存在的简谐振动, 因此称为稳态反应。

下面先讨论无阻尼体系和阻尼体系在简谐荷载作用下的反应，然后再讨论两种体系的共振反应。

2.6.1 无阻尼体系

如果体系没有阻尼，运动方程(2-61)为

$$m\ddot{x} + kx = p_0 \sin \bar{\omega} t \quad (2-62)$$

这个方程的通解为(2-59)式所表达的自由振动反应，其特解是一个与荷载 $p(t)$ 同频率、同相位角的简谐量， $\bar{\omega}$ 表示荷载频率。因此，可以假定

$$x_p(t) = G \sin \bar{\omega} t \quad (2-63)$$

待定的振幅 G 可由下述方法确定；将(2-63)式代入方程(2-62)，整理得

$$G(-m\bar{\omega}^2 + k) \sin \bar{\omega} t = p_0 \sin \bar{\omega} t$$

上式对任意时刻 t 都成立，因此

$$G(-m\bar{\omega}^2 + k) = p_0$$

两边除以 k ，由(2-22)式，有

$$G \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \right) = \frac{p_0}{k}$$

以 β 来表示荷载频率与自由振动固有频率的比

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (2-64)$$

因此特解的反应振幅为

$$G = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

将上式代入(2-63)式，然后与(2-59)式的通解叠加，得无阻尼体系位移反应的通解

$$x(t) = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega} t \quad (2-65)$$

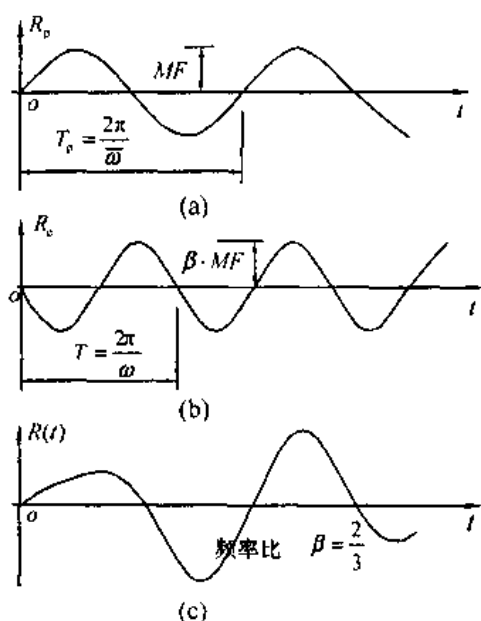
式中，系数 A 和 B 由初始条件决定。假定体系从静止状态开始振动，即 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ，将这个初始条件代入(2-65)式及其对时间 t 的导数，可得

$$A = -\frac{p_0 \beta}{k(1 - \beta^2)}, \quad B = 0$$

从而无阻尼体系的反应为

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \alpha t}{1 - \beta^2} \quad (2-66)$$

式中，第一项为稳态反应，第二项为瞬态反应； $\frac{p_0}{k}$ 为静位移 x_{st} ，即将静荷载 p_0 作用于体系所产生的位移； $\frac{1}{1 - \beta^2}$ 为动力放大系数(MF)，即稳态反应的幅值与静位移的比值。稳态反应的振动频率是施加荷载的频率，无论体系有无阻尼，稳态项都将保持下去；瞬态反应是由初始条件引起的自由振动，有时又被称为伴随自由振动，振动的频率为体系的固有频率。



(a) 稳态 (b) 瞬态 (c) 总反应

图 2-14 简谐荷载作用下从静止开始的反应比

率。由于实际结构总是有阻尼存在, 因此自由振动项将随时间的推移而逐渐消失。自由振动持续时间的长短取决于阻尼的大小。阻尼小, 持续时间长; 阻尼大, 持续时间短。当然在目前这种理想的无阻尼条件下, 自由振动是不会消失的。对有阻尼体系, 自由振动消失后, 体系就进入稳态反应。

现定义反应比 $R(t)$ 为动力反应和相应静位移的比值

$$R(t) = \frac{x(t)}{x_{st}} = \frac{k}{p_0} x(t) \quad (2-67)$$

由(2-66)式, 初始条件为零的无阻尼体系在简谐荷载作用下的反应比为

$$R(t) = \frac{\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t}{1 - \beta^2} \quad (2-68)$$

图2-14给出了初始条件为零的无阻尼体系在简谐荷载作用下的反应比特性。假定荷载

频率与自由振动频率比为 $\beta = \frac{2}{3}$, 图2-14(a)为稳态分量, 图2-14(b)为瞬态分量。图2-14(c)为这两个分量的和, 即反应比 $R(t)$ 。从图中可以看出: ① 两个分量有时而同相、时而反相的趋势; ② 当 $t=0$ 时, $R(t)$ 的斜率为零, 这表示瞬态项和稳态项的反应速度正好相互抵消, 因而初始速度为零的条件得到满足。

2.6.2 阻尼体系

如果体系阻尼不为零, 将运动方程(2-61)两边除以 m , 利用(2-37a)式, 有 $\frac{c}{m} = 2\xi\omega$, 可得

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega} t \quad (2-69)$$

当阻尼小于临界阻尼时, 这个方程的通解 $x_c(t)$ 为(2-60)式给出的阻尼体系的自由振动反应。简谐荷载作用下的特解可假定为如下形式

$$x_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t \quad (2-70)$$

由于阻尼体系的反应一般不与荷载同相, 因此式中包含第二项。

将(2-70)式代入方程(2-69), 整理可得

$$\begin{aligned} & (-G_1 \bar{\omega}^2 - 2G_2 \bar{\omega} \xi \omega + G_1 \omega^2) \sin \bar{\omega} t + \\ & (-G_2 \bar{\omega}^2 + 2G_1 \bar{\omega} \xi \omega + G_2 \omega^2) \cos \bar{\omega} t = \frac{p_0}{m} \sin \bar{\omega} t \end{aligned}$$

这是一个三角恒等式, 对于任意时刻 t 等式均成立, 必然有等式两边 $\sin \bar{\omega} t$ 和 $\cos \bar{\omega} t$ 的系数分别相等, 即

$$\begin{aligned} -G_1\bar{\omega}^2 - 2G_2\bar{\omega}\xi\omega + G_1\omega^2 &= \frac{p_0}{m} \\ -G_2\bar{\omega}^2 + 2G_1\bar{\omega}\xi\omega + G_2\omega^2 &= 0 \end{aligned}$$

用 ω^2 去除这两个方程, 利用(2-22)和(2-64)两式, 合并同类项得

$$\begin{aligned} (1-\beta^2)G_1 - (2\xi\beta)G_2 &= \frac{p_0}{k} \\ (2\xi\beta)G_1 + (1-\beta^2)G_2 &= 0 \end{aligned}$$

求解上述联立方程组, 可得系数

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{p_0}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \\ G_2 &= \frac{p_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{aligned}$$

将它们代入特解表达式(2-70), 然后再与通解(2-60)式组合, 可得位移反应的通解

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\xi\omega t} (A\sin\omega_D t + B\cos\omega_D t) + \\ &\quad \frac{p_0}{k} \frac{(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta\cos\bar{\omega}t}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \end{aligned} \quad (2-71)$$

上式等号右边第一项的常数 A 和 B 由给定的初始条件确定。这一项为瞬态反应项, 由于阻尼项会很快消失, 这里略去不考虑它。等号右边第二项为稳态反应项, 其幅值与初始条件无关, 而振动频率与荷载相同, 但相位角不同, 很容易将此项化为一个三角函数的形式, 令

$$\begin{aligned} 1-\beta^2 &= \bar{\rho}\cos\theta \\ 2\xi\beta &= \bar{\rho}\sin\theta \end{aligned}$$

可知 $\bar{\rho} = [(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{0.5}$ 。将上式代入(2-71)式的第二项, 可得体系的稳态反应为

$$x(t) = \rho\sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (2-72)$$

式中, ρ 为稳态反应的振幅, θ 为反应滞后于荷载的相位角。其值分别为

$$\rho = \frac{p_0}{k} [(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{0.5} \quad (2-73a)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \right) \quad (2-73b)$$

θ 的定义域为 $0 < \theta < \pi$ 。反应的振幅 ρ 与静位移 $x_{st} = \frac{p_0}{k}$ 的比值定义为动力放大系数, 并用 D 表示

$$D = \frac{\rho}{x_{st}} = [(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{0.5} \quad (2-74)$$

对于不同的阻尼比 ξ , 利用(2-74)和(2-73b)两式, 可分别作出动力放大系数 D 和相位角 θ 随频率比 β 的变化曲线。这些关系曲线分别示于图2-15和图2-16。

从图2-15可以看出, 当阻尼比 $\xi = 0.7$, $0 < \beta < 0.6$ 时, 放大系数 D 接近于常量。这为设计地震加速度计提供了方便。

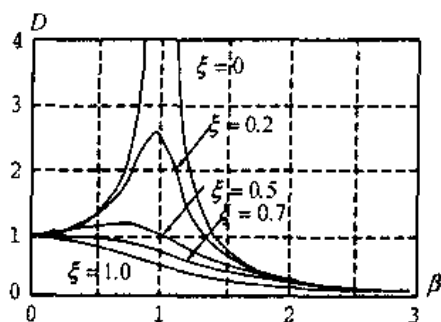


图 2-15 动力放大系数与频率比的关系曲线

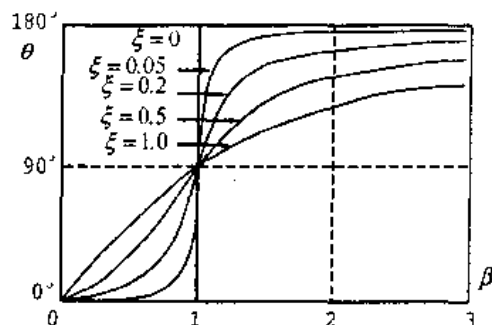


图 2-16 相位角与频率比的关系曲线

例2-3 一种携带式激振器可在现场测定结构的动力特性。用这种激振器对某结构施加幅值 $p_0 = 2.50 \text{ kN}$ 的简谐荷载，但两次施加的频率不同，分别测得

① $\bar{\omega}_1 = 16.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\rho_1 = 1.83 \times 10^{-2} \text{ cm}$, $\theta_1 = 15.0^\circ$;

② $\bar{\omega}_2 = 25.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\rho_2 = 3.68 \times 10^{-2} \text{ cm}$, $\theta_2 = 55.0^\circ$ 。

试利用这些数据确定单自由度体系的质量、阻尼和刚度。

【解】 为了利用这些数据，首先用(2-73b)式对(2-73a)式进行改造

$$\rho = \frac{x_{st}}{1 - \beta^2} \left[1 + \left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \right)^2 \right]^{-0.5} = \frac{x_{st}}{1 - \beta^2} (1 + \tan^2 \theta)^{-0.5} = \frac{x_{st}}{1 - \beta^2} \cos \theta \quad (\text{a})$$

再进一步简化上式，有

$$k(1 - \beta^2) = k - \bar{\omega}^2 m = \frac{p_0}{\rho} \cos \theta$$

然后引入两组实验数据，可得如下方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -16^2 \\ 1 & -25^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = 2.5 \begin{bmatrix} \frac{\cos 15^\circ}{1.83 \times 10^{-4}} \\ \frac{\cos 55^\circ}{1.83 \times 10^{-4}} \end{bmatrix}$$

由此可解得

$$k = 1.97 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}, \quad m = 2.52 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

重量为

$$W = mg = 247 \text{ kN}$$

固有频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27.9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

由上述(a)式和(2-73b)式分别可得

$$\cos \theta = \frac{k}{p_0} \rho (1 - \beta^2), \quad \cos \theta = \frac{1 - \beta^2}{2\xi\beta} \sin \theta$$

令这两个 $\cos \theta$ 的表达式相等，注意到 $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $k = m\omega^2$ 可解出阻尼比

$$\xi = \frac{p_0 \sin \theta}{2\beta k \rho} = \frac{p_0 \sin \theta}{c_c \bar{\omega} \rho}$$

用第一组试验数据可得阻尼为

$$c = \xi c_c = 2.21 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$$

阻尼比为

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} = \frac{c\omega}{2k} = 15.7\%$$

用第②组试验数据也可以得到相近的结果。

2.6.3 共振反应

从图2-15可以看出, 对于小阻尼体系 ($\xi < 0.2$), 稳态反应的峰值出现在频率比接近于1的地方。当频率比 $\beta = 1$, 通常称荷载频率等于固有频率时体系处于共振状态。对于无阻尼体系, 从方程(2-68)可见, 共振时稳态反应将趋于无穷大。对于有阻尼体系, 由方程(2-74)可求出共振时动力放大系数与阻尼比成反比

$$D_{\beta=1} = \frac{1}{2\xi} \quad (2-75)$$

这个值只是接近于动力放大系数的最大值, 并不是它的最大值。为了求得动力放大系数的最大值, 可利用方程(2-74), 由 $\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0$, 求得当 $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 反应峰值发生在频率比

$$\beta_{\max} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (2-76a)$$

处, 相应的动力放大系数的峰值为

$$D_{\max} = \left[2\xi \sqrt{1 - \xi^2} \right]^{-1} \quad (2-76b)$$

由于通常的阻尼比是很小的, 因此可以用(2-75)式来近似 D_{\max} 。

现在用(2-71)式来建立包含瞬态项和稳态项的共振反应表达式。当 $\beta = 1$ 时, 该位移方程变为

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) - \frac{x_{st}}{2\xi} \cos \omega t \quad (2-77)$$

假定体系的初始条件为 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, 可定出常数

$$A = \frac{\omega}{2\omega_D} x_{st} = \frac{x_{st}}{2\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad B = \frac{x_{st}}{2\xi}$$

将这两个常数代入(2-77)式, 位移反应方程为

$$x(t) = \frac{x_{st}}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\xi \sin \omega_D t}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \cos \omega_D t \right) - \cos \omega t \right] \quad (2-78)$$

在小阻尼情况下, 上式中 $\sin \omega_D t$ 的幅值要比 $\cos \omega_D t$ 的幅值小得多, 因此正弦项可以忽略不计; 此外, $\omega_D \approx \omega$, 故小阻尼体系的反应比近似为

$$R(t) = \frac{x(t)}{x_{st}} = \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t \quad (2-79)$$

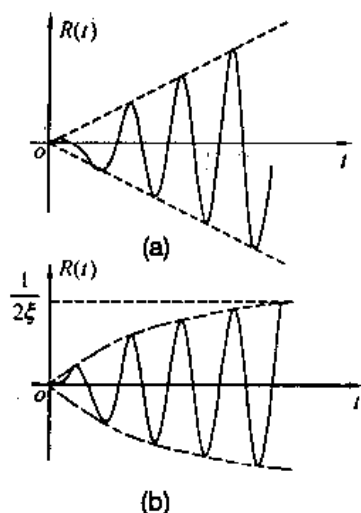


图 2-17 静止初始条件下共振反应

当阻尼为零时,体系的反应比由(2-68)式给出。但共振时 $\beta=1$, 该式成为 $\frac{0}{0}$ 的不定形式, 这时应用罗必达法则可求得相应的反应比

$$R(t) = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{d\beta}(\sin\beta\alpha t - \beta\sin\alpha t)}{\frac{d}{d\beta}(1-\beta^2)} = \lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{-1}{2\beta}(\alpha\cos\beta\alpha t - \sin\alpha t) = 0.5(\sin\alpha t - \alpha\cos\alpha t) \quad (2-80)$$

方程(2-79)和(2-80)的曲线如图2-17所示。从图上可以看出,无论体系有没有阻尼,反应都是逐渐增加的。但在阻尼体系中,阻尼限制了共振反应的振幅无限地增大。在无阻尼体系中,反应幅值不断增加,每完成一个周期,

时间 t 增加 $\frac{2\pi}{\omega}$, 幅值增加一个 π 值,最后必然导致体系破坏。

2.7 在任意周期荷载作用下的反应

我们在2.6节讨论了单自由度体系在简谐荷载作用下的位移反应。但是实际荷载往往不是这种简单的正弦荷载,因此本节和其后两节讨论单自由度体系在较为常见的动力荷载和任意动力荷载作用下的位移反应。

图2-18示出了一个任意的周期荷载 $p(t)$, 这是一个周期函数,其周期为 T_p 。为了书写简便,以 $\bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_p}$ 来表示荷载傅里叶级数的基频(最低频率),以 $\omega_n = n\bar{\omega}_1 = \frac{2n\pi}{T_p}$ 来表示级数的第 n 个频率,则可以

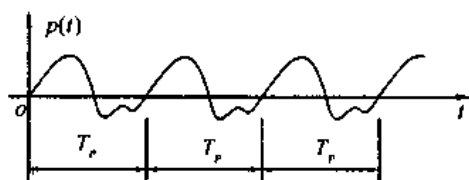


图 2-18 任意周期性荷载

把周期荷载展开成傅里叶级数

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t \quad (2-81)$$

利用三角函数的正交性,可得级数中各项的系数为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \bar{\omega}_n t dt \\ b_n &= \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \bar{\omega}_n t dt \end{aligned} \right\} \quad (2-82)$$

由于体系是线弹性的,因此可以分别求出体系对于荷载级数每一项的反应,然后利用

叠加原理, 把对于各个荷载项的反应相加, 就求出体系对于周期性荷载 $p(t)$ 的总反应。应当指出, 随着频率的升高, 荷载项的幅值迅速减少, 它对于总反应的影响也迅速减小, 因此只需计算级数(2-81)中有限项的反应, 就可达到精度要求, 而不用去考虑高频项的影响。

考虑荷载级数(2-81)的第 n 个正弦项, 该项的表达式说明对应的荷载幅值为 b_n , 频率为 $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1$, 因此频率比为

$$\beta_n = \frac{\bar{\omega}_n}{\omega} = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega}$$

利用方程(2-66), 该项在无阻尼体系中引起的稳态反应为

$$x_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \sin n\bar{\omega}_1 t \quad (2-83a)$$

同样, 对于级数的第 n 个余弦项的稳态反应为

$$x_n(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \cos n\bar{\omega}_1 t \quad (2-83b)$$

对于常量荷载分量的稳态反应正好是静挠度

$$x_{st} = \frac{a_0}{k} \quad (2-83c)$$

利用叠加原理, 无阻尼体系对于周期性荷载 $p(t)$ 的总反应为

$$x(t) = \frac{1}{k} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\bar{\omega}_1 t + b_n \sin n\bar{\omega}_1 t}{1 - \beta_n^2} \right) \quad (2-83d)$$

式中, 级数各项的系数由(2-82)式给出。

对于有阻尼体系, 可利用(2-71)式, 仿照上述方法, 分别求出对于荷载级数每一项的稳态反应, 然后叠加起来, 求得总的稳态反应为

$$x(t) = \frac{1}{k} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2a_n \xi \beta_n + b_n(1 - \beta_n^2)] \sin n\bar{\omega}_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[a_n(1 - \beta_n^2) - b_n 2\xi \beta_n] \cos n\bar{\omega}_1 t}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi \beta_n)^2} \right\} \quad (2-84)$$

例2-4 图2-19示出了一个理想化的单自由度体系及其所承受的周期荷载, 该荷载由单个正弦半波组成。假定图2-19所示结构是无阻尼的, 且 $\beta_1 = \frac{\bar{\omega}_1}{\omega} = 0.75$, $\beta_2 = \frac{2\bar{\omega}_1}{\omega} = 2\beta_1 = 1.5$ 。试分析这一结构的稳态反应。

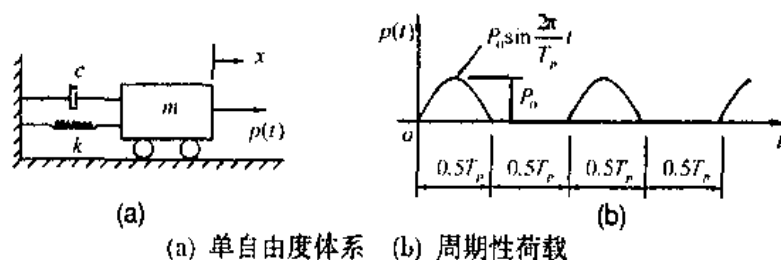


图 2-19 周期性荷载反应分析例子

[解] 利用方程(2-82), 可求出此荷载傅里叶级数展开式的系数

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{0.5T_p} p_0 \sin \bar{\omega}_1 t dt = \frac{p_0}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{0.5T_p} p_0 \sin \bar{\omega}_1 t \cos \bar{\omega}_n t dt = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数;} \\ \frac{2p_0}{\pi(1-n^2)}, & n \text{ 为偶数。} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{0.5T_p} p_0 \sin \bar{\omega}_1 t \sin \bar{\omega}_n t dt = \begin{cases} \frac{p_0}{2}, & n=1; \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

将这些系数代入方程(2-81), 可得到给定周期荷载的傅里叶表达式

$$p(t) = \frac{p_0}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \bar{\omega}_1 t - \frac{2}{3} \cos 2\bar{\omega}_1 t - \frac{2}{15} \cos 4\bar{\omega}_1 t - \dots \right)$$

将上式及所给出的傅里叶级数各项的系数和频率比 β_1, β_2 的具体数值代入(2-83)式, 可得出结构的稳态反应为

$$x(t) = \frac{p_0}{k\pi} \left(1 + \frac{8\pi}{7} \sin \bar{\omega}_1 t + \frac{8}{15} \cos 2\bar{\omega}_1 t + \frac{1}{60} \cos 4\bar{\omega}_1 t + \dots \right)$$

如果结构是有阻尼的, 其分析过程完全相类似, 只需将具体数值代入(2-84)式即可。

2.8 在冲击荷载作用下的反应

2.8.1 冲击荷载反应的一般性质

冲击荷载是持续时间很短的荷载。当荷载作用的时间小于或略大于结构的自振周期时, 就可以将其看作为冲击荷载。图2-20示出了一个一般冲击荷载的例子。对于某些结构(例如货车、汽车、桥或吊车等)来说, 在设计过程中往往要考虑这种荷载。对于结构设计来说, 由冲击荷载所引起的最大反应往往比全部反应过程更为重要, 其原因在于荷载作用时间很短, 阻尼力还来不及从结构中吸收较多的能量, 结构的最大反应就已经达到了, 因此阻尼在这里就显得不太重要了。由于这个原因, 本节仅考虑无阻尼体系对于冲击荷载的反应。

在以下的讨论中, 我们将得知: 单自由度系统对冲击荷载的反应主要与冲击荷载的类型以及冲击荷载持续时间与结构的固有周期的比值有关。由于冲击荷载常会引起结构的严重破坏, 在设计中必须加以重视。通常可采用以下三种途径来减少冲击荷载的破坏性:

- ① 加强系统;
- ② 降低冲击的冲量;
- ③ 采取隔离保护措施。

冲击在结构动力逆分析——模态分析中有着广泛的应用。

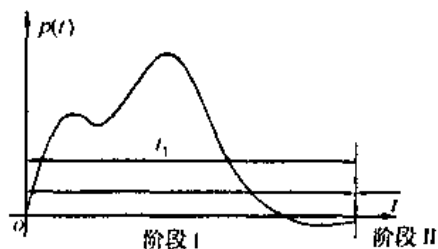
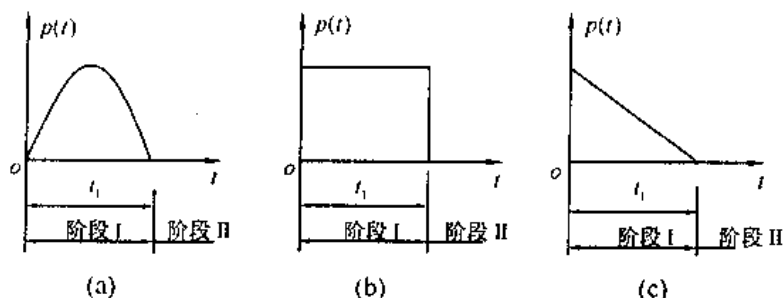


图 2-20 任意冲击荷载

2.8.2 各种脉冲波的动态响应分析

冲击荷载变化形式众多, 图2-20及图2-21是其中经简化的几种脉冲形式。



(a) 正弦半脉冲 (b) 矩形脉冲 (c) 三角形脉冲

图 2-21 几种简化的脉冲形式

1) 求解冲击荷载反应的方法

分析结构对于冲击荷载的反应应按两个阶段进行。第 I 阶段为有荷载作用的强迫振动。在此阶段中, 假定荷载持续时间为 t_1 , 那么当 $0 \leq t \leq t_1$ 时, 结构的运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = p(t) \quad (2-85)$$

这时只要求得方程的一个特解 $x_p(t)$, 再与(2-26)式给出的通解组合, 便得到运动方程的通解。然后再利用初始条件确定待定常数, 就得到这个阶段的位移反应了。第 II 阶段 ($t > t_1$) 为无荷载作用的自由振动, 其初始条件为阶段 I 终时刻的位移 $x(t_1)$ 和速度 $\dot{x}(t_1)$, 只要利用前一阶段的结果, 便可由(2-28)式确定阶段 II 的位移反应。

2) 正弦半波脉冲冲击荷载的反应分析

图2-21(a)示出了一个正弦半波脉冲荷载。在阶段 I 结构受简谐荷载, 假定结构从静止开始运动, 方程(2-66)给出了此阶段的位移反应为

$$x(t) = \frac{p_0}{k} \frac{(\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \alpha t)}{1 - \beta^2}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (2-86)$$

在阶段 II 结构进行自由振动, 其初始条件为 $x_0 = x(t_1)$ 和 $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_1)$ 。为了计算方便, 引入新的时间变量 $\bar{t} = t - t_1$ 。利用(2-28)式, 可得阶段 II 的位移反应为

$$x(\bar{t}) = \frac{1}{\omega} \dot{x}(t_1) \sin \alpha \bar{t} + x(t_1) \cos \alpha \bar{t}, \quad \bar{t} \geq 0 \quad (2-87)$$

一般来说, 冲击荷载引起的最大反应比全部反应过程更有意义。

如果最大反应发生在阶段 I, 为了确定反应峰值发生的时刻, 将方程(2-86)对时间 t 求导, 并令其导数等于零

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0}{k} \frac{\bar{\omega} \cos \bar{\omega} t - \bar{\omega} \cos \alpha t}{1 - \beta^2} = 0$$

由此可得

$$\bar{\omega} t = 2n\pi \pm \alpha t, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2-88)$$

注意到这个表达式仅在 $\alpha t \leq \pi$ 才正确, 即最大反应出现在冲击荷载作用时间内。同时注意到当荷载频率 $\bar{\omega}$ 趋近于结构自振频率 ω 时, 对结构是最不利的。综上因素, 可在(2-88)式中取 $n=1$, 而在该式右边取负号, 可得

$$\bar{\omega}t = \frac{2\pi}{1 + \frac{\omega}{\bar{\omega}}} \quad (2-89)$$

最大反应值可将(2-89)式代入(2-86)而得到, 注意这个结果仅当 $\bar{\omega}t < \pi$ 以及 $\bar{\omega} < \omega$ 时才是正确的。

对持续时间短的正弦波脉冲, 当 $\beta > 1$ ($\bar{\omega} > \omega$) 时, 最大反应发生在阶段 II。这一阶段的初始位移和初速度可将 $t_1 = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$ 代入(2-86)式及其导数表达式得到

$$x_0 = x(t_1) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \left(0 - \beta \sin \frac{\pi}{\beta} \right)$$

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(t_1) = \frac{p_0}{k} \frac{\bar{\omega}}{1 - \beta^2} \left(-1 - \beta \cos \frac{\pi}{\beta} \right)$$

由方程(2-31a), 此阶段自由振动的位移幅值为

$$\rho = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right)^2 \right]^{0.5} = \frac{p_0}{k |1 - \beta^2|} \beta \left(2 + \cos \frac{\pi}{\beta} \right)^{0.5} =$$

$$\frac{p_0}{k} \frac{2\beta}{|1 - \beta^2|} \cos \frac{\pi}{2\beta}$$

动力放大系数为

$$D = \frac{k\rho}{p_0} = \frac{2\beta}{|1 - \beta^2|} \cos \frac{\pi}{2\beta}, \quad \beta > 1, t > t_1 \quad (2-90)$$

3) 矩形脉冲荷载的反应分析

将图2-21(b)所示的矩形脉冲分为两个阶段。

在阶段 I 期间, 突然施加幅值为 p_0 的常荷载, 这个荷载又称为阶跃荷载。阶跃荷载的特解为静位移

$$x_{st} = \frac{p_0}{k} \quad (2-91a)$$

将这个特解和方程(2-26)给出的通解相结合, 很容易得到从静止开始振动的位移反应

$$x(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t), \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (2-91b)$$

在阶段 II, 结构发生自由振动, 其反应再次由方程(2-87)给出

$$x(\bar{t}) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + x(t_1) \cos \omega \bar{t}, \quad \bar{t} = t - t_1 \geq 0 \quad (2-92)$$

从(2-91b)式看, 显然当 $\omega t = \pi$, 即 $t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{2}T$ 时, 位移反应达到极大值 $x_{\max} = \frac{2p_0}{k}$ 。

因此当荷载持续时间 $t_1 \geq \frac{1}{2}T$, 即 $\frac{t_1}{T} \geq \frac{1}{2}$ 时, 矩形脉冲为长持续时间的荷载, 最大反应发生在阶段 I, 动力放大系数为 2。

对于持续时间短的荷载, 最大反应发生在阶段 II 的自由振动期间。首先利用(2-91b)式求得阶段 I 的运动速度

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_0 \omega}{k} \sin \omega t \quad (2-93)$$

然后由(2-91b)式和上式确定阶段 I 终时刻的位移 $x(t_1)$ 和速度 $\dot{x}(t_1)$ ，把它们作为阶段 II 的初始位移 x_0 和初始速度 \dot{x}_0 。由(2-31a)式，阶段 II 的反应幅值为

$$\begin{aligned} \rho = x_{\max} &= \left[x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega} \right)^2 \right]^{0.5} = \\ &= \frac{p_0}{k} \left(1 - 2\cos \omega t_1 + \cos^2 \omega t_1 + \sin^2 \omega t_1 \right)^{0.5} = \\ &= 2 \frac{p_0}{k} \left(\frac{1 - \cos \omega t_1}{2} \right)^{0.5} = 2 \frac{p_0}{k} \sin \frac{1}{2} \omega t_1 \end{aligned}$$

注意到 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ，相应的动力放大系数

$$D = \frac{k\rho}{p_0} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{T}, \quad \frac{t_1}{T} \leq \frac{1}{2} \quad (2-94)$$

因此当 $\frac{t_1}{T} \leq \frac{1}{2}$ 时，动力放大系数是一个正弦函数，它随脉冲时间与固有周期之比 $\frac{t_1}{T}$ 而变化。

三角形脉冲的反应，我们亦可用相同的方法作出讨论。感兴趣的读者可参考文献[1]。

2.8.3 反应谱及震动谱

由上述讨论可知：无阻尼单自由度结构由给定的冲击荷载形式所引起的最大反应仅仅依赖于脉冲的持续时间与结构的固有周期的比值 $\frac{t_1}{T}$ 。因此，我们可以画出三种脉冲荷载的放大系数 D 与脉冲长度比 $\frac{t_1}{T}$ 的关系曲线，如图2-22所示。图中的曲线又称为冲击荷载的位移反应谱或简称为反应谱。

利用反应谱可以在工程允许的精度内，计算体系在给定脉冲作用下的最大位移反应和最大弹性力。

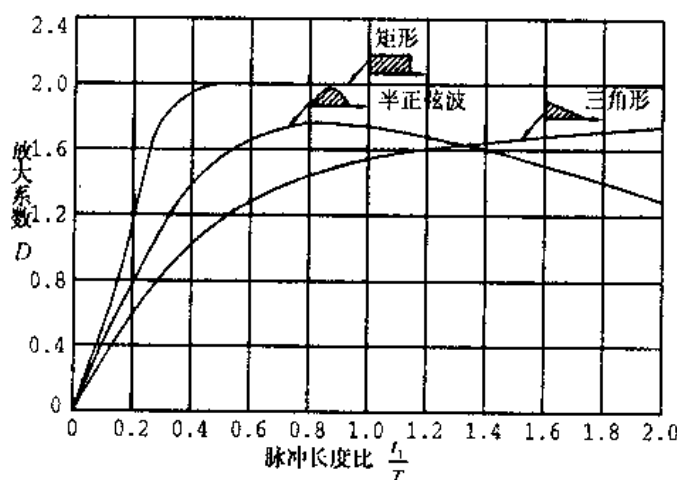


图 2-22 三种脉冲型式的位移反应谱(震动谱)

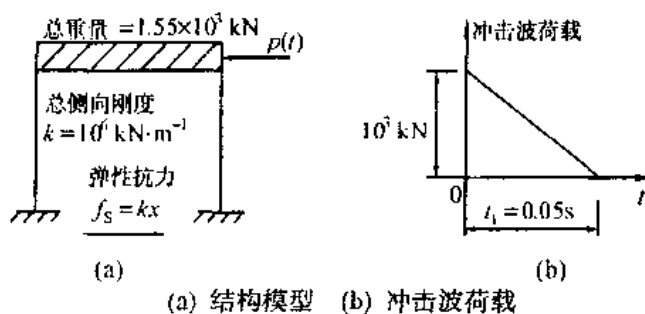


图 2-23 承受冲击荷载的单自由度建筑物

例2-5 图2-23示出了某单层建筑的理想化模型和所承受的荷载。试计算该荷载引起的最大弹性力。

[解] 根据给定数据,可确定体系的固有周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}} = 2\pi \sqrt{\frac{1.55 \times 10^3}{10^6 \times 9.81}} = 0.079 \text{ s}$$

因此,脉冲长度比为

$$\frac{t_1}{T} = \frac{0.05}{0.079} = 0.630$$

从图2-22可查得动力放大系数为 $D = 1.33$, 因此最大位移为

$$x_{\max} = \frac{Dp_0}{k} = 0.133 \text{ cm}$$

由它所引起的最大弹性力为

$$f_{s,\max} = kx_{\max} = 10^4 \times 0.133 = 1.33 \times 10^3 \text{ kN}$$

如果脉冲作用时间为上述作用时间的 $\frac{1}{10}$, 即 $t_1 = 0.005 \text{ s}$, 则其脉冲长度比为 $\frac{t_1}{T} = 0.063$, 动力放大系数 $D = 0.44$, 产生的弹性恢复力仅为 440 kN。由此可见, 对于持续时间短的荷载来说, 作用荷载的大部分为结构惯性力所抵消, 因而它在结构中所产生的应力要小得多。

图2-22所示曲线也可以用来计算由地基脉冲加速度所引起的结构最大加速度。假定作用于地基的脉冲加速度为 $\ddot{x}_g(t)$, 其最大值为 \ddot{x}_{g_0} 。由方程(2-19)可见, 如果不计正负号, 由该地基加速度引起的等效荷载为 $p_{\text{eff}}(t) = m\ddot{x}_g(t)$, 该荷载最大值为 $m\ddot{x}_{g_0}$, 它相当于前述几种冲击荷载的幅值 p_0 。此时, 动力放大系数可用质量相对于地基的相对位移的最大值 x_{\max} 表示为

$$D = \frac{kx_{\max}}{p_0} = \frac{|kx_{\max}|}{|m\ddot{x}_{g_0}|} \quad (2-95)$$

由方程(2-18), 在无阻尼条件下, 质量的运动方程为

$$m\ddot{x}_i + kx = 0$$

这说明在无阻尼体系里, 质量的总惯性力 $m\ddot{x}_i$ 与作用于它的弹性力 kx 大小相等, 方向相反。当两者都达到极大值时, 有

$$|m\ddot{x}_{i,\max}| = |kx_{\max}|$$

将上式代入(2-91)式, 得

$$D = \frac{\left| \frac{kx_{\max}}{m\ddot{x}_{g0}} \right|}{\left| \frac{m\ddot{x}_{i,\max}}{m\ddot{x}_{g0}} \right|} = \frac{\left| \ddot{x}_{i,\max} \right|}{\left| \ddot{x}_{g0} \right|} \quad (2-96)$$

上式说明：如果不计正负号，动力放大系数等于质量总加速度的最大值与地基加速度的最大值之比。因此，当已知地基加速度的最大值为 \ddot{x}_{g0} 时，同样可以用图2-22的曲线来估算支承在地基上的结构总的最大加速度。由于这些曲线可用于此目的，因此又称它们为震动谱。

2.9 在任意动力荷载作用下的反应与杜哈梅尔积分

2.9.1 无阻尼体系的杜哈梅尔积分及数值计算

研究无阻尼单自由度体在图2-24所示任意动力荷载 $p(t)$ 作用下的反应，可把荷载分解为一系列微冲量 $p(\tau)d\tau$ 的连续作用，分别求出体系对每个微冲量的反应，然后根据线性叠加原理，将这些反应累加起来，就得到体系对于任意动力荷载的反应。

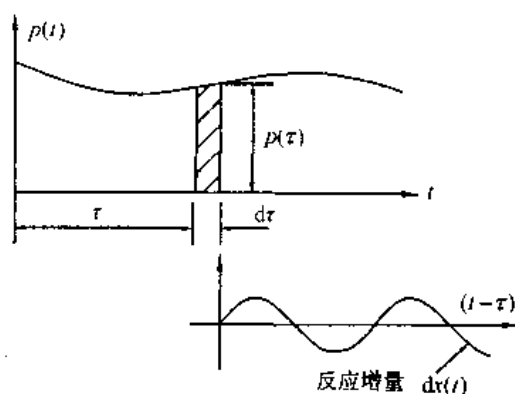


图 2-24 (无阻尼)杜哈梅尔积分的推导

现在我们的不难用上节介绍的方法得出在持续时间短的矩形脉冲作用下的无阻尼体系的运动速度表达式，并将其改写为如下形式

$$dx(t) = \frac{p_0}{k} \omega \sin \omega t dt = \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t dt$$

上式给出了在 $t=0$ 时刻，体系在矩形冲量 $p_0 dt$ 作用下所引起的位移反应增量。如果作用的冲量为 $p(\tau)d\tau$ ，则由此冲量引起的位移反应增量为

$$dx(t) = \frac{p(\tau) \sin \omega t d\tau}{m\omega} \quad (2-97)$$

注意到冲量与质量的比等于速度的改变 $d\dot{x} = \frac{p(\tau)}{m} d\tau$ ，与(2-28)式相比较可知，由于微冲量 $p(\tau)d\tau$ 的作用，引起的位移反应的增量等于初始条件为 $x_0 = x(0) = 0$ ， $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = d\dot{x}$ 的自由振动。

如果微冲量不是作用在 $t=0$ 时刻，而是作用在 $t=\tau$ 时刻，则需经把图2-24的坐标原点向右移 τ ，因此(2-97)式变为

$$dx(t) = \frac{p(\tau)}{m\omega} \sin\omega(t-\tau)d\tau \quad (2-98)$$

因为在 $t < \tau$ 时, 微冲量 $p(\tau)d\tau$ 没有作用于体系, 因此上式只有当 $t > \tau$ 时才有意义。

(2-98)式只是系统对一个微冲量的反应。当动力荷载 $p(\tau)$ 从 $\tau=0$ 到 $\tau=t$ 时刻连续作用时, 体系的反应等于一系列微冲量反应相叠加, 即

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega(t-\tau)d\tau \quad (2-99)$$

这个方程称为无阻尼体系的杜哈梅尔积分, 它可用来计算无阻尼单自由度体系在任意形式的动力荷载作用下的位移反应。但在荷载变化很不规则或荷载由试验数据给出, 而写不出解析表达式时, 必须用数值积分来进行计算。

(2-99)式是在体系的初始条件为零的情况下导出的。如果初始条件不为零, 还必须附加(2-38)式的自由振动反应。在一般情况下, 体系的反应为

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin\omega t + x_0 \cos\omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega(t-\tau)d\tau \quad (2-100)$$

下面讨论如何用数值方法来计算(2-99)式所表达的反应。利用三角恒等式 $\sin(\omega t - \omega\tau) = \sin\omega t \cos\omega\tau - \cos\omega t \sin\omega\tau$, 可把该式变为

$$x(t) = \frac{\sin\omega t}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos\omega\tau d\tau - \frac{\cos\omega t}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega\tau d\tau$$

令

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \cos\omega\tau d\tau \\ \bar{B}(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin\omega\tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2-101)$$

则无阻尼体系在任意荷载作用下的位移反应可表示为

$$x(t) = \bar{A}(t) \sin\omega t - \bar{B}(t) \cos\omega t \quad (2-102)$$

式(2-102)的求解关键是用数值积分来计算系数 $\bar{A}(t)$ 和 $\bar{B}(t)$ 。

以 $\bar{A}(t)$ 为例, 令 $y(\tau) = p(\tau) \cos\omega\tau$ 。当用辛普森法来进行数值积分时, 积分值近似地用 $\frac{\Delta\tau \bar{s}_n}{3}$ 来表示, 则

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t y(\tau) d\tau \approx \frac{\Delta\tau}{3m\omega} \bar{s}_n \quad (2-103)$$

为了计算上述积分, 可将积分区间 $[0, t]$ 分为 n 个等分(如图2-25所示) $t = n\Delta\tau$ 积分值近似地等于曲线 $y(\tau)$ 所围曲边梯形的面积。为了计算各个小区间的面积, 可在每个小区间内取不同数目的样点。如果

样点数为1, 则对应的积分法称为矩形法; 如果样点数为2, 则对应的积分法则是梯形法。最常用的是辛普森法, 该法要求 n 为偶数, 每个小区间的长度为 $2\Delta\tau$, 第一个小区间的面积为

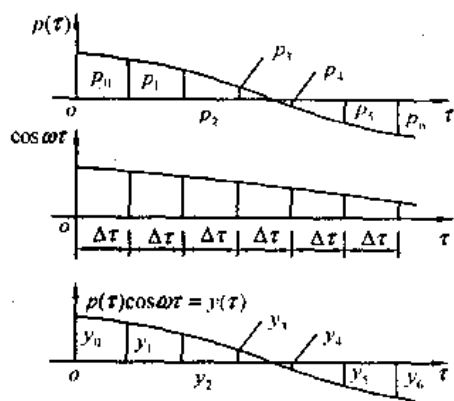


图 2-25 杜哈梅尔积分数值求和法的计算

$$\int_0^{2\Delta\tau} y(\tau) d\tau \approx \frac{\Delta\tau}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{\Delta\tau \bar{s}_2}{3}$$

将每个小区域的微面积相加, 得总面积为

$$\int_0^t y(\tau) d\tau \approx \frac{1}{3} \Delta\tau (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) = \frac{\Delta\tau \bar{s}_n}{3} \quad (2-104)$$

一般说来, 需要求的不是某个特定时刻的反应, 而是一系列相继时刻 $t_1 = 2\Delta\tau$, $t_2 = 4\Delta\tau \dots$ 的反应。为了得到全部反应过程, 将求和写为增量形式, 假定已算得 \bar{s}_{n-2} 则

$$\begin{aligned} \bar{s}_n &= \bar{s}_{n-2} + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) = \\ &= \bar{s}_{n-2} + [p(t - 2\Delta\tau)\cos\omega(t - 2\Delta\tau) + \\ &+ 4p(t - \Delta\tau)\cos\omega(t - \Delta\tau) + p(t)\cos\omega t] \end{aligned} \quad (2-105)$$

同样

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau)\sin\omega\tau d\tau = \frac{1}{m\omega} \int_0^t y'(\tau) d\tau = \frac{1}{m\omega} \frac{\Delta\tau}{3} \bar{s}'_n \quad (2-106)$$

式中, \bar{s}'_n 的计算与 \bar{s}_n 的相类似, 只需将(2-105)式中的余弦函数换为正弦函数即可。

将(2-103)式和(2-106)式代入(2-102)式, 则可导得无阻尼体系反应的数学表达式:

$$x(t) = \frac{\Delta\tau}{3m\omega} [\bar{s}_n \sin\omega t - \bar{s}'_n \cos\omega t] \quad (2-107)$$

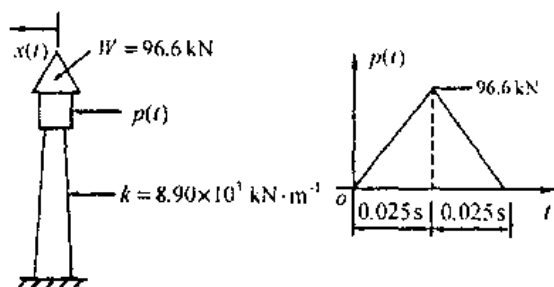


图 2-26 承受冲击波荷载的水塔

数值积分方法的精度取决于时间间隔

$\Delta\tau$ 的长短。根据一般经验, 当 $\frac{\Delta\tau}{T} \leq 0.1$ 时, 能得到满意的结果。

例2-6 用杜哈梅尔积分的数值方法, 计算图2-26所示的水塔在三角形冲击波荷载作用下的位移反应和弹性力(尽管图示简单荷载的反应, 可以由直接积分算出, 但为了说明数值积分的计算步骤, 这里仍用数值方法进行计算)。

【解】体系的振动频率和周期为

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{kg}{M}} = \sqrt{\frac{8.90 \times 10^3 \times 9.81}{96.6}} = 30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \approx 0.209 \text{ s} \end{aligned}$$

取时间增量 $\Delta\tau = 0.005 \text{ s}$, 角增量则为 $\omega\Delta\tau = 0.15 \text{ rad}$ 。显然, $\frac{\Delta\tau}{T} \ll 0.1$, 可望得到足够精度的结果。方程(2-107)方括号前的系数为

$$\bar{G} = \frac{\Delta\tau}{3m\omega} = \frac{0.005 \times 9.81}{96.6 \times 30 \times 3} = 5.641 \times 10^{-6}$$

当 $t = 2\Delta\tau$ 时, 由(2-105)式

$$\begin{aligned} \bar{s}_2 &= \bar{s}_0 + [p(0)\cos 0 + 4p(\Delta\tau)\cos\omega\Delta\tau + p(2\Delta\tau)\cos 2\omega\Delta\tau] = \\ &= 0 + (0 + 4 \times 19.32 \times 0.989 + 38.64 \times 0.955) = 113.3 \end{aligned}$$

以正弦函数代替(2-105)式中的余弦函数, 可算得

$$\begin{aligned}\bar{s}_2' &= \bar{s}_0' + [p(0)\sin 0 + 4p(\Delta\tau)\sin\omega\Delta\tau + p(2\Delta\tau)\sin 2\omega\Delta\tau] = \\ &0 + (0 + 4 \times 19.32 \times 0.150 + 38.64 \times 0.295) = 23.0\end{aligned}$$

由(2-107)式, 位移反应为

$$\begin{aligned}x(2\Delta\tau) &= \bar{G}[\bar{s}_2\sin 2\omega\Delta\tau - \bar{s}_2'\cos 2\omega\Delta\tau] = \\ &5.641 \times 10^{-6}(113.3 \times 0.295 - 23.0 \times 0.995) = 6.46 \times 10^{-5} \text{ m}\end{aligned}$$

相应的弹性力为

$$f_s(2\Delta\tau) = kx(2\Delta\tau) = 0.575 \text{ kN}$$

再计算 $t = 4\Delta\tau$ 时刻的位移和弹性力

$$\begin{aligned}\bar{s}_4 &= \bar{s}_2 + [p(2\Delta\tau)\cos 2\omega\Delta\tau + 4p(3\Delta\tau)\cos 3\omega\Delta\tau + p(4\Delta\tau)\cos 4\omega\Delta\tau] = \\ &113.3 + (38.64 \times 0.955 + 4 \times 57.96 \times 0.901 + 77.28 \times 0.826) = 422.4 \\ \bar{s}_4' &= \bar{s}_2' + [p(2\Delta\tau)\sin 2\omega\Delta\tau + 4p(3\Delta\tau)\sin 3\omega\Delta\tau + p(4\Delta\tau)\sin 4\omega\Delta\tau] = \\ &23.0 + (38.64 \times 0.295 + 4 \times 57.96 \times 0.435 + 77.28 \times 0.564) = 178.8 \\ x(4\Delta\tau) &= \bar{G}[\bar{s}_4\sin 4\omega\Delta\tau - \bar{s}_4'\cos 4\omega\Delta\tau] = 5.1 \times 10^{-4} \text{ m} \\ f_s(4\Delta\tau) &= kx(4\Delta\tau) = 4.54 \text{ kN}\end{aligned}$$

如此算下去, 可得到冲击荷载作用期间各时刻的位移反应和弹性力见表2-4。

表2-4 水塔受冲击荷载作用期间各时刻的位移反应和弹性力

$t(\text{s})$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
$x(\text{mm})$	0.065	0.51	1.67	3.47	5.36
$f_s(\text{kN})$	0.575	4.54	14.9	30.9	47.7

冲击荷载结束后, 体系按最终时刻 $t = 10\Delta\tau$ 算得的 $\bar{A}(10\Delta\tau)$ 和 $\bar{B}(10\Delta\tau)$ 的值作自由振动, 见方程(2-102), 其反应由下式给出

$$x(t) = \bar{A}(10\Delta\tau)\sin\omega t - \bar{B}(10\Delta\tau)\cos\omega t$$

运动的幅值为

$$x_{\max} = \sqrt{[\bar{A}(10\Delta\tau)]^2 + [\bar{B}(10\Delta\tau)]^2}$$

2.9.2 有阻尼体系的杜哈梅尔积分及计算

有阻尼体系在任意动力荷载作用下反应的杜哈梅尔积分表达式的推导过程和无阻尼体系的完全相同。但在阻尼体系中, 微冲量 $p(\tau)d\tau$ 所引起的自由振动反应按指数规律衰减。利用(2-42)式所表达的有阻尼体系的自由振动反应, 取体系的初始条件为 $x_0 = 0$,

$\dot{x}_0 = \frac{p(\tau)d\tau}{m}$, 并将坐标原点右移 τ , 就得到由微冲量 $p(\tau)d\tau$ 所引起的位移反应增量

$$dx(t) = \frac{e^{-\xi\omega(t-\tau)}}{m\omega_D} [p(\tau)\sin\omega_D(t-\tau)]d\tau, \quad t > \tau \quad (2-108)$$

将各个反应微分增量累加起来, 便得到与(2-99)式相对应的杜哈梅尔积分表达式

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau \quad (2-109)$$

为了进行数值计算, 把上式变为与(2-102)式的对应形式

$$x(t) = A(t)\sin\omega_D t - B(t)\cos\omega_D t \quad (2-110)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t \frac{p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \cos\omega_D \tau}{e^{\xi\omega\tau}} d\tau \\ B(t) &= \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t \frac{p(\tau) e^{\xi\omega\tau} \sin\omega_D \tau}{e^{\xi\omega\tau}} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (2-111)$$

这些积分可用前述增量求和的方法进行计算, 只是运算中要考虑指数衰减。与无阻尼的情况相类似, 这两个积分可表述为(2-103)和(2-106)式的对应形式

$$\left. \begin{aligned} A(t) &\approx \frac{\Delta\tau}{3m\omega_D} s_n \\ B(t) &\approx \frac{\Delta\tau}{3m\omega_D} s'_n \end{aligned} \right\} \quad (2-112)$$

式中, s_n 和 s'_n 表示相应被积函数在样点的函数值的加权和。假定已算得 $t = (n-2)\Delta\tau$ 时刻的值 s_{n-2} , 则在 $t = n\Delta\tau$ 时刻

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-2} + p(t-2\Delta\tau)\cos\omega_D(t-2\Delta\tau)\exp(-2\xi\omega\Delta\tau) + \\ &\quad 4p(t-\Delta\tau)\cos\omega_D(t-\Delta\tau)\exp(-\xi\omega\Delta\tau) + p(t)\cos\omega_D t \end{aligned} \quad (2-113)$$

类似地, 只需用正弦函数代替上式的余弦函数, 便可得到计算 s'_n 的递推公式。

将(2-112)式代入(2-110)式, 便可得到用数值积分方法计算有阻尼体系位移反应的公式

$$x(t) = \frac{\Delta\tau}{3m\omega_D} (s_n \sin\omega_D t - s'_n \cos\omega_D t) \quad (2-114)$$

计算过程总结如下:

- ① 根据体系的物理特性: 重量 W 、刚度 k 和阻尼比 ξ , 计算无阻尼频率 ω 和阻尼频率 ω_D 以及固有周期 T ;
- ② 确定时间增量 $\Delta\tau$, 要求 $\frac{\Delta\tau}{T} \leq 0.1$;
- ③ 计算(2-114)式圆括号前的系数 $G = \frac{\Delta\tau}{3m\omega_D}$ 以及(2-113)式中多次用到的系数 $e^{-2\xi\omega\Delta\tau}$ 和 $4e^{-\xi\omega\Delta\tau}$;
- ④ 对于 $t = 2\Delta\tau, 4\Delta\tau$ 等依次计算:
 - s_n — 用(2-113)式;
 - s'_n — 将(2-113)式中的余弦函数变为正弦函数, 进行计算;
 - $x(t)$ — 用(2-114)式;
 - $f_s(t)$ — $f_s(t) = kx(t)$ 。

习题

2-1 试确定图T2-1所示体系的广义物理特性 M^* , C^* , K^* 和广义荷载 P^* , 这些特性都根据位移坐标 $z(t)$ 定义。计算结果用所给物理特性及尺寸来表达。

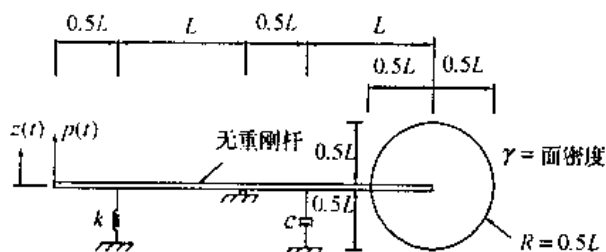


图 T2-1

2-2 按习题2-1的要求计算图T2-2所示的结构。

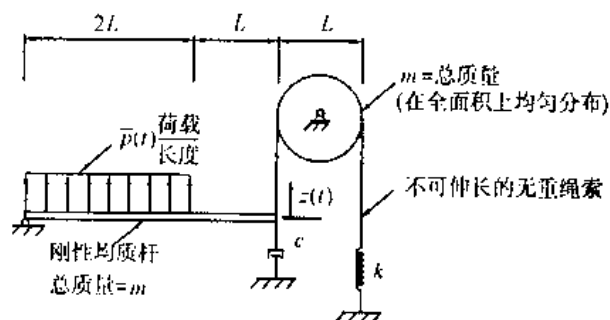


图 T2-2

2-3 按习题2-1的要求计算图T2-3所示的结构。(提示: 因为两个弹簧完全控制了两个刚性杆的相对运动, 所以这个体系仅有一个动力自由度)

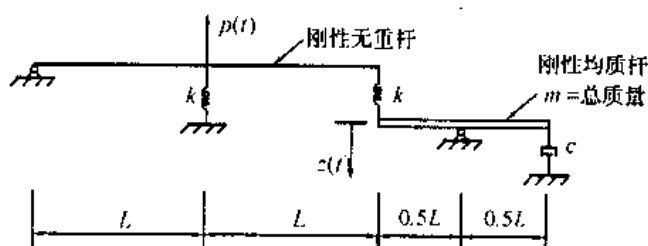


图 T2-3

2-4 如图T2-4所示的柱, 由于规定它的位移形状函数为

$$\psi(x) = \frac{y(x,t)}{z(t)} = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2L}\right)$$

故可作为单自由度体系处理。用 \bar{m} 表示每单位长度的均布质量, 用 EI 表示不变的刚度, 用 $\bar{p}(t)$ 表示单位长度的均布荷载, 试计算广义物理特性 M^* , K^* 和广义荷载 P^* 。

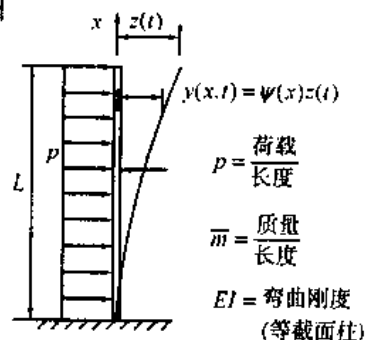


图 T2-4

2-5 ① 如果图T2-4的柱子顶端作用有向下的轴向力 N ，试用同样的形状函数 $\psi(x)$ 计算体系的广义联合刚度 \bar{K} ；② 如果轴向力 N 沿柱子高度线性变化，即 $N(x) = N\left(1 - \frac{x}{L}\right)$ 重算①题。

2-6 如图T2-6 (a)所示，已知等截面悬臂梁在自由端集中荷载 p 作用下的挠曲方程为

$$y(x) = \frac{pL^3}{3EI} \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}$$

① 假定梁单位长度上的质量 $\bar{m} = 0$ ，自由端有集中质量 m ，用影响系数法写出体系的运动方程；

② 若 $\bar{m} \neq 0$ ，而自由端的集中质量 $m = 0$ ，计算体系的广义质量。

2-7 假定在例2-2中，建筑物横梁的重量为900 kN，用千斤顶迫使横梁偏离平衡位置的位移为 $x_0 = 3$ cm，然后突然释放，使结构产生自由振动。测得结构往返摆动一周的时间为0.64 s，一周后的最大正位移 $x_1 = 2.2$ cm。试求：

① 横向弹簧刚度 k ；

② 阻尼比 ξ ；

③ 阻尼系数。

2-8 假定图T2-8所示结构的质量 $m = 350$ kg，刚度 $k = 70$ kN·m⁻¹。如果体系发生自由振动，其初始条件为 $x(0) = 2$ cm， $\dot{x}(0) = 14$ cm·s⁻¹，试求 $t = 1.0$ s 时的位移及速度。假定：

① $c = 0$ (无阻尼体系)；

② $c = 0.5$ kN·s·m⁻¹ (阻尼体系)。

2-9 假定图T2-8所示体系的质量 $m = 10^3$ kg，刚度 $k = 400$ kN·m⁻¹，阻尼 $c = 0$ ，初始位移 $x(0) = 4.5$ cm，当 $t = 1.2$ s 时位移仍然为4.5 cm，试求：

① $t = 2.4$ s 时的位移；

② 自由振动的振幅。

2-10 假定图T2-6(a)所示悬臂梁单位长度上的质量为 \bar{m} ，自由端支承物的质量 $m = 0$ ，试计算梁的自由振动频率，并与准确解 $\omega = \frac{3.52}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$ 相比较，计算误差为百分之几？采用下述挠曲线作为基本振型：

① 在自由端作用有集中荷载 p 的挠曲线

$$y_d(x) = \frac{pL^3}{3EI} \frac{3Lx^2 - x^3}{2L^3}$$

② 在自重 $\bar{m}g$ 作用下的挠曲线

$$y_d(x) = \frac{\bar{m}gL^4}{24EI} \frac{6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4}{L^4}$$

2-11 计算图T2-11所示均匀等截面简支梁的振动周期。假定 $m_1 = 3\bar{m}L$ ，采用跨中集中荷载 p 所引起的挠曲

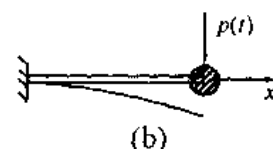
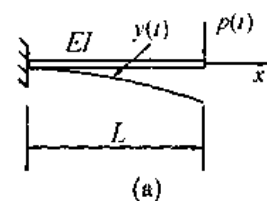


图 T2-6

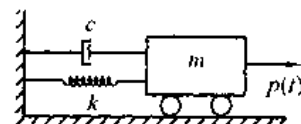


图 T2-8

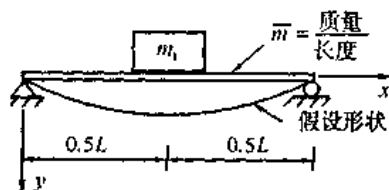


图 T2-11

线作为基本振型

$$y_d(x) = \frac{px}{48EI} (3L^2 - 4x^2)$$

2-12 假定图T2-8所示的基本体系有如下的动力特性: $m = 400 \text{ kg}$, $k = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ 。如果体系从静止开始承受共振简谐荷载 ($\bar{\omega} = \omega$), 试确定 $\bar{\omega}t = 8\pi$ 时的反应比 $R(t)$ 的值。假定:

- ① $c = 0$ [用方程(2-80)];
- ② $c = 100 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ [用方程(2-79)];
- ③ $c = 400 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ [用方程(2-79)]。

2-13 一位移计固有频率为 1 Hz , 无阻尼, 用来测量频率为 4 Hz 的地基简谐振动。若仪器质量的位移幅值为 1.3 mm , 求地基位移的幅值为多少?

2-14 一个支架重 4 kN , 把它安置在实验室地板上。而地板正以 20 Hz 的频率作竖向运动, 振幅为 0.08 cm 。由于支架上安装有精密仪器, 需把支架的振幅减小到 0.01 cm , 试确定所需隔振体系的弹簧刚度。

2-15 一个分筛机重 30 kN , 当满载运行时, 将在支座上产生 12 Hz , 3 kN 的谐振力, 要把这个谐振力作用于支座上的力的幅值减小到 1.5 kN , 试确定所需隔振装置的弹簧刚度以及 x_{st} 。

2-16 试将图T2-16所示的周期荷载展开成傅里叶级数。

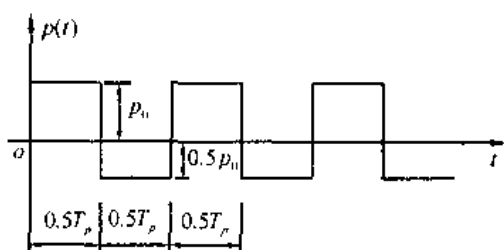


图 T2-16

2-17 假定某结构阻尼比为 0.1 , 重算例2-3。

2-18 假定图T2-8所示基本体系的重量 $W = mg = 3 \text{ kN}$, 弹簧刚度 $k = 195 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ 。如果体系承受图2-21(a)所示的正弦半波脉冲, 荷载幅值 $p_0 = 2.5 \text{ kN}$, 持续时间 $t_1 = 0.15 \text{ s}$, 试确定:

- ① 出现最大反应的时间;
- ② 由该荷载引起的最大弹簧力, 并利用从查图2-22获得的结果来校核前述计算值。

2-19 从0线性增大到峰值的三角形脉冲具有如下特性

$$p(t) = p_0 \frac{t}{t_1}, \quad 0 < t < t_1$$

- ① 假定体系的初始条件为0, 试推导在此荷载作用下单自由度体系的反应表达式;
- ② 如果 $t_1 = \frac{3\pi}{\omega}$, 试确定由此荷载引起的最大反应。

2-20 假定图T2-8所示基本体系的物理特性为 $m = 4 \times 10^3 \text{ kg}$, $k = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ 。承受图2-21(c)所示三角形脉冲荷载, 其荷载幅值 $p_0 = 15 \text{ kN}$, 持续时间 $t_1 = 0.42 \text{ s}$ 。试利用图2-22

的反应谱确定最大弹性力。

2-21 假定图T2-21(a)所示单自由度体系的初始条件为0，试求：

- ① 在图T2-21(b) 所示冲击荷载作用下的反应表达式；
- ② 在图T2-21(c) 所示冲击荷载作用下，在 $0 \leq t \leq t_1$ 和 $t_1 \leq t \leq t_1 + t_2$ 两个阶段的反应表达式。

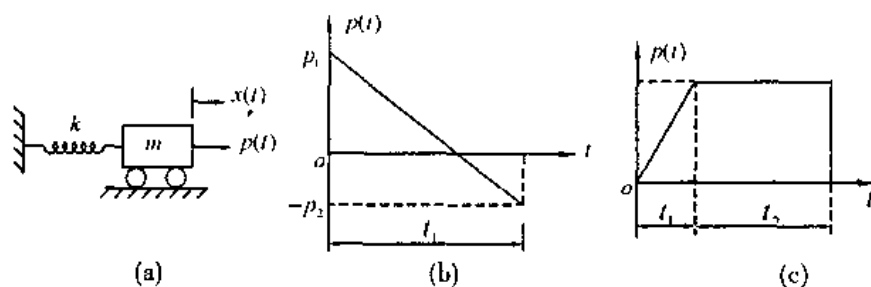


图 T2-21

2-22 假定结构阻尼比 $\xi = 5\%$ ，试用辛普森积分重新计算例2-5。

2-23 图T2-23(a) 所示单自由度刚架，承受图T2-23(b)所示冲击波荷载作用。取 $\Delta\tau = 0.12\text{ s}$ ，用辛普森法计算荷载作用期间的位移反应和弹性力。

- ① 假定 $c = 0$ ；
- ② 假定 $c = 400\text{ kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

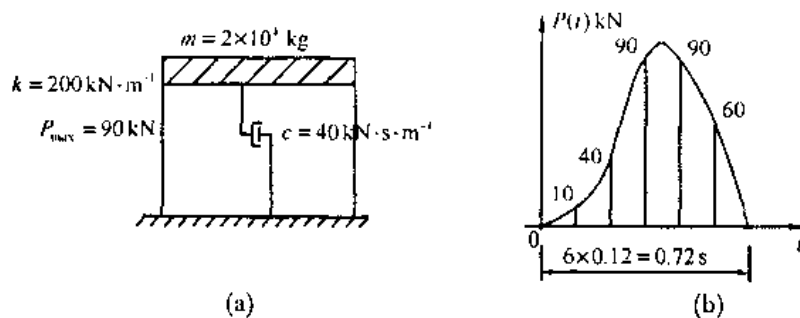


图 T2-23

第3章 多自由度体系的振动

第2章介绍了单自由度体系的振动理论,对此只需用一个独立坐标便能描述体系的运动形态。但实际工程结构较为复杂,常常需要多个独立坐标才能描述体系的运动形态,因此需要讨论多自由度体系的振动理论。

一个具有 n 个自由度的体系,它在任一瞬时的运动形态要用 n 个独立坐标来描述。一般说来,体系的运动方程是 n 个互相耦合的二阶常微分方程组成的方程组。

本章主要讨论如何建立具有集中质量离散体系的运动方程;如何用有限元法将分布参数体系简化为离散体系,并建立其运动方程;如何求解体系的运动微分方程和如何计算体系的瞬态反应。

3.1 自由度的选择

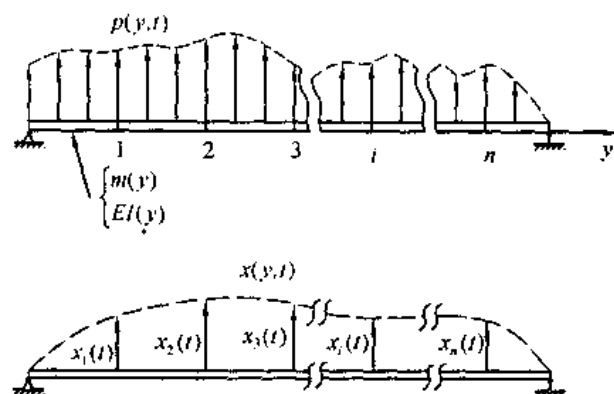


图 3-1 一般梁式结构的离散化

在上一章,我们已系统地讨论了单自由度体系的振动。实际上并非所有的体系用单自由度模型表示都能取得较满意的结果,真正能用单自由度模型表示的结构很少。若用单自由度模型表示(或近似表示)一个结构,包括用广义单自由度体系在内,其最终取得的结果是否令人满意取决于所采用的假定是否较好地反映真实情况,这一点恰是最难以把握的。

一般说来,用一个单自由度模型不足以适当地描述一个结构的动力反应。

通常,反应一般包括振幅和位移形状随时间的变化,这样的行为只能用一个以上的位移坐标来描述,即须用多个自由度表示。

一个结构应用多少动力自由度表示,取决于分析者的判断。一般而言,所选用的动力自由度的数目越大,越能逼近结构的真实行为。

以图3-1所示的简支梁为例,假定该梁的运动由其上的一系列离散点位移 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, \dots , $x_n(t)$ 所确定。原则上,结构上的这些点可任意设置且点数越多越好,但对此梁,往往只需两三个自由度就能取得极好的结果。在图3-1中,梁上的每一节点只取一个位移分量,而将转角和纵向运动分量忽略不计。

3.2 用动力平衡条件建立动力方程

针对体系每个自由度列出动力平衡条件,就能写出图3-1所示结构的运动方程。一般来

说, 在任何一点 i 处, 包含有四种力: 外荷载 $p_i(t)$, 由运动产生的惯性力 f_{Ii} 、阻尼力 f_{Di} 和弹性力 f_{Si} , 这样, 对多自由度体系中的每一个自由度, 动力平衡条件可写成

$$\begin{aligned} f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= p_1(t) \\ f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} &= p_2(t) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3-1a)$$

或用向量形式, 可写成

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (3-1b)$$

每一个分力均可用一系列影响系数表示。

以节点 1 为例, 在节点 1 上产生的弹性力分量可写成

$$f_{S1} = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \cdots + k_{1N}x_N$$

对一般节点 i , 则有

$$f_{Si} = k_{i1}x_1 + k_{i2}x_2 + \cdots + k_{iN}x_N$$

用矩阵形式, 全部弹性力可写成

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{Si} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} & \cdots & k_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (a)$$

由此可定义刚度影响系数

k_{ij} = 由 j 坐标单位位移所引起的对应于 i 坐标的力。

若假定阻尼力与速度有关(粘滞阻尼假定), 则节点 i 上的阻尼力为

$$\begin{aligned} f_{Di} &= c_{i1}\dot{x}_1 + c_{i2}\dot{x}_2 + \cdots + c_{iN}\dot{x}_N \\ \begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{Di} \\ \vdots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (b)$$

相应可定义阻尼影响系数

c_{ij} = 由 j 坐标单位速度所引起的对应于 i 坐标的力。

惯性力也可用一组影响系数表示, 这组系数叫做质量影响系数。它们反映自由度的加速度与其产生的惯性力之间的关系, 类似于公式(a)、公式(b), 惯性力可表示为

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{Ii} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1i} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2i} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \cdots & m_{ii} & \cdots & m_{iN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (c)$$

其中, m_{ij} = 由坐标 j 的单位加速度引起的对应于 i 坐标的力。

把式(a)、(b)、(c)代入式(3-1a)或(3-1b), 考虑全部动力自由度, 可给出结构的动力平

衡方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (3-2)$$

其中矩阵 m , c , k 展开形式的各元素由式(c)、(b)、(a)表示。

3.3 用影响系数法建立运动方程

由于结构阻尼系数通常是用实验方法来确定的, 为了简单, 这里不考虑阻尼。现在以图3-2(a)所示的三自由度体系为例, 说明如何用影响系数法来确定质量弹簧体系的质量矩阵和刚度矩阵。

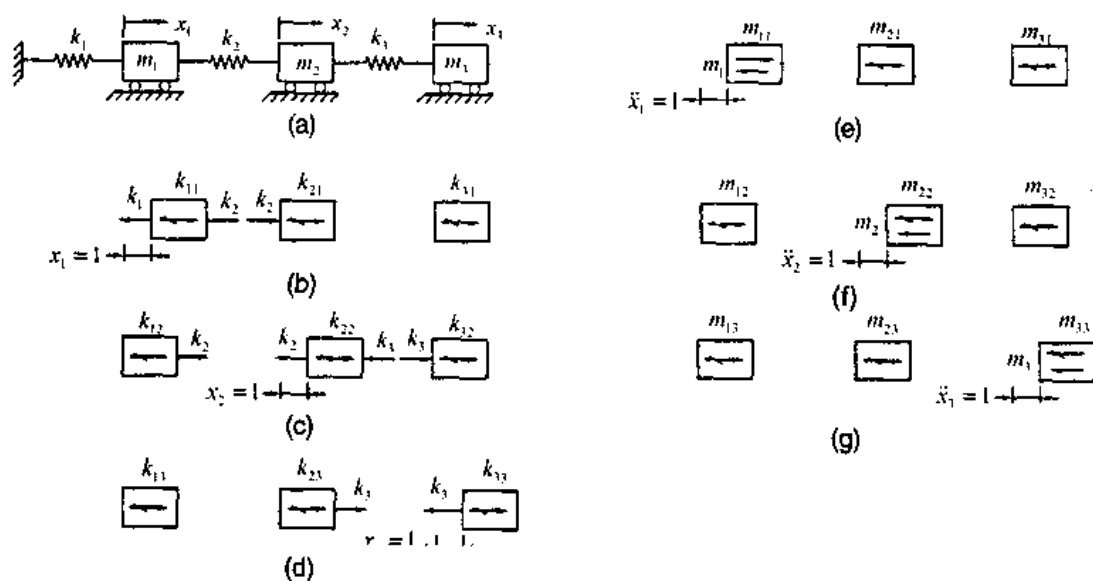


图 3-2 计算影响系数的示例

图示体系有三个质量, 由于约束, 这三个质量都只能在水平方向运动, 因此这是一个三自由度体系。取三个质量相对于各自平衡位置的位移为独立坐标, 并将其表示为

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$$

先只考虑静态, 令 $x = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ 。此时弹簧 k_1 的变形为 $\Delta_1 = x_1 - 0 = 1$, 弹簧力 $f_{s1} = k_1 \Delta_1 = k_1$, 弹簧受拉; 弹簧 k_2 的变形为 $\Delta_2 = x_2 - x_1 = -1$, 弹簧力 $f_{s2} = k_2 \Delta_2 = -k_2$, 弹簧受压; 弹簧 k_3 没有变形, 弹簧力 $f_{s3} = 0$ 。诸弹簧作用于各质量的力, 如图3-2(b)所示。为了维持这种特殊的位移状态, 需要在各个坐标方向施加外力来与弹簧作用于各质量的力保持平衡, 所施加的力(图中箭杆上画有斜线的力)应是

$$k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{21} = -k_2, \quad k_{31} = 0$$

同样地, 令 $x = [0 \quad 1 \quad 0]^T$, 得到

$$k_{12} = -k_2, \quad k_{22} = k_2 + k_3, \quad k_{32} = -k_3$$

最后令 $x = [0 \quad 0 \quad 1]^T$, 得到

$$k_{13} = 0, \quad k_{23} = -k_3, \quad k_{33} = k_3$$

因此刚度矩阵为

$$k = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

现在只考虑动态, 令加速度向量为 $\ddot{x} = [1 \ 0 \ 0]^T$, 见图3-2(e)(为了直观, 加速度的值以位移的形式画出来)。由受力分析得知, 为维持这种加速度状态, 在各个坐标方向施加的力(图中箭杆上画有斜线的力)应当是

$$m_{11} = m_1, \quad m_{12} = 0, \quad m_{13} = 0$$

令 $\ddot{x} = [0 \ 1 \ 0]^T$, 得到

$$m_{12} = 0, \quad m_{22} = m_2, \quad m_{32} = 0$$

最后, 令 $\ddot{x} = [0 \ 0 \ 1]^T$, 得到

$$m_{13} = 0, \quad m_{23} = 0, \quad m_{33} = m_3$$

所以质量矩阵为

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

体系各个质量上没有外力作用, 所以运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

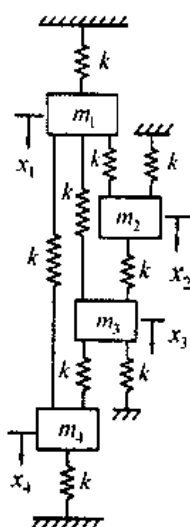


图 3-3 复杂质量弹簧体系

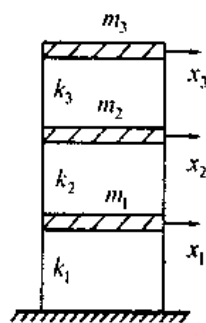


图 3-4 三层建筑物的简化模型

对于质量弹簧体系来说, 当每个质量仅考虑一个平移自由度时, 其质量矩阵总是(3-4)式这样的对角形式, 对角元素 m_{ii} 正好等于第 i 个质块(或质点)的质量 m_i 。不论体系多么复杂, 其刚度矩阵的组成规则是: 对角元素 k_{ii} 为联结在质量 m_i 上的所有弹簧刚度的和; 非对角元素 k_{ij} 都是负值, 其大小等于联结质量 m_i 和 m_j 的弹簧刚度。

有了这个规则, 就不难写出图3-3所示复杂质量弹簧体系的质量矩阵和刚度矩阵。若记位移向量为 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$, 则

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 4k & -k & -k & -k \\ -k & 3k & -k & 0 \\ -k & -k & 4k & -k \\ -k & 0 & -k & 3k \end{bmatrix}$$

这个结论同样适用于承受剪切变形的质量弹簧体系。例如图3-4所示一个三层建筑物的简化模型。由于楼层的刚度比柱子的刚度大得多，可以把它看作为一个刚性的大梁。大梁上集中了楼层的全部质量和绝大部分柱子的质量（只有底层柱子的部分质量集中于基础），柱子被看作无重杆，这样建筑物就被简化为具有三个集中质量的体系。不计柱子的轴向变形，每个质量仅考虑水平位移一个自由度，体系就简化为三自由度体系。每层两边柱子的水平抗剪刚度之和为 k_i ($i=1,2,3$)，即当该层上下两个质量水平相对位移 $\Delta_i=1$ 时，该层两根柱子剪力之和为 k_i 。对这样的简化模型，其质量和刚度矩阵仍由(3-4)式和(3-3)式算得，但 k_i 为抗剪刚度。

应当指出，在动力问题中，位移向量 x 仅包含可动节点位移分量，不包含约束方向的位移分量（即不包含刚体位移分量），速度向量和加速度向量也同样，这是与静力问题不同的地方。由于这样规定了位移向量，使得动力问题的结构刚度矩阵本身就是满秩可逆的；而不像静力问题那样，在进行支座处理之前， k 是降秩的。

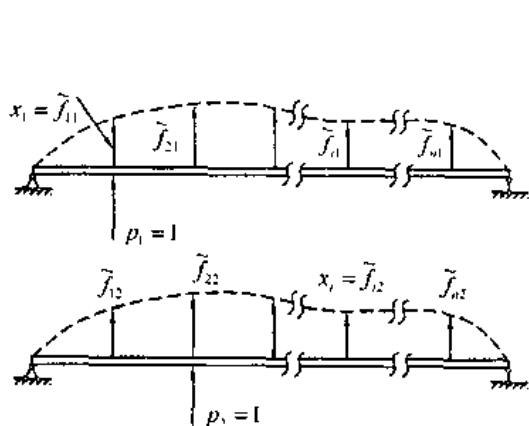


图 3-5 柔度影响系数的定义

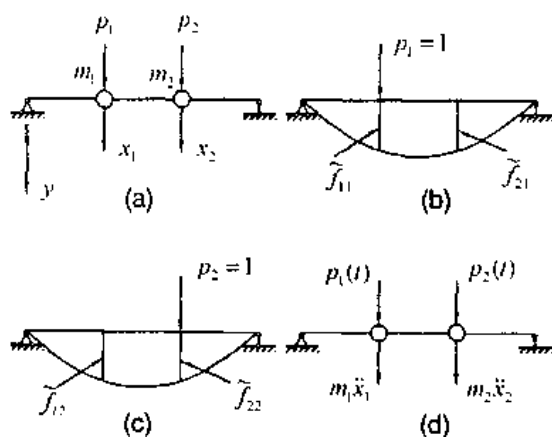


图 3-6 两自由度的简支梁

对于静定结构，有时计算结构刚度矩阵比较费事，而计算它的逆阵——柔度矩阵 \tilde{f} 却比较容易，这里定义柔度影响系数 \tilde{f}_{ij} 为在第 j 个坐标方向上作用单位力引起的第 i 个坐标方向上的位移。其物理意义与刚度影响系数恰好相反。

以图3-5所示简支梁为例，说明柔度影响系数的定义和求法。假定只考虑竖向位移，按定义在坐标 x_j 方向上作用单位力 $p_j=1$ ，然后计算节点 i 的挠度 x_i ，它即是柔度影响系数 \tilde{f}_{ij} 。柔度影响系数可用结构力学中的图乘法算得：依次在每个位移方向施加单位力 $p_j=1$ ($j=1,2,\dots,n$)，然后作出相应的弯矩图 \bar{M}_j ，如果只考虑弯曲变形能，则柔度影响系数为

$$\tilde{f}_{ij} = \int_0^L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx \quad (3-5)$$

式中, EI 为梁的抗弯刚度, L 为梁的长度。梁的柔度影响系数还可以用材料力学中的挠曲线方程算得(见例3-1)。

有了柔度影响系数的概念后, 就可以讨论如何建立体系的位移方程了。为了简单, 下面不计阻尼, 以图3-6所示两自由度简支梁为例, 说明如何得到体系的位移方程。

图示这种无质量弹性梁上具有若干个集中质量的多自由度体系, 它是由质量连续分布的弹性梁简化来的。设 p_1 、 p_2 是不随时间变化的力, 并以静力的方式作用到梁上, 这时梁只产生位移(即挠度), 不产生加速度。取集中质量 m_1 、 m_2 的静力平衡位置为坐标 x_1 、 x_2 的原点。按影响系数的定义, 当 $p_1=1$, $p_2=0$ 时, 两个质量的位移为 $x_1=\tilde{f}_{11}$, $x_2=\tilde{f}_{21}$, 如图3-6(b)所示; 当 $p_1=0$, $p_2=1$ 时, 两个质量的位移为 $x_1=\tilde{f}_{12}$, $x_2=\tilde{f}_{22}$, 如图3-6(c)所示。对于线弹性体, 当两个质量同时受到大小为 p_1 、 p_2 的外力作用时, 它们的位移可由叠加原理得到

$$\begin{aligned}x_1 &= \tilde{f}_{11}p_1 + \tilde{f}_{12}p_2 \\x_2 &= \tilde{f}_{21}p_1 + \tilde{f}_{22}p_2\end{aligned}$$

将上面两式写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

或简记为

$$x = \tilde{f}p \quad (b)$$

式中, \tilde{f} 称为结构的柔度矩阵, p 为荷载向量或作用力向量。

当外力是动荷载 $p_1(t)$ 、 $p_2(t)$ 时, 必然使梁产生加速度, 因此集中质量上有惯性力存在, 见图3-6(d)。此时(a)式成为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) - m_1\ddot{x}_1 \\ p_2(t) - m_2\ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

将上式改写为如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11} & \tilde{f}_{12} \\ \tilde{f}_{21} & \tilde{f}_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} \right)$$

或简写为

$$x = \tilde{f}[p(t) - m\ddot{x}] \quad (3-6)$$

这便是两自由度无阻尼体系的位移方程。 n 自由度体系的位移方程也是上面的形式, 但柔度矩阵是 n 阶方阵。位移方程还可以写为下面形式

$$\tilde{f}m\ddot{x} + x = \tilde{f}p(t) \quad (3-7)$$

为了找到柔度矩阵和刚度矩阵的关系, 假定阻尼为零, 将方程(3-2)改写为

$$kx = p(t) - m\ddot{x} \quad (3-8)$$

前面曾经提到, 在动力问题中刚度矩阵 k 是满秩可逆的。将上式两端均前乘 k^{-1} , 得

$$x = k^{-1}[p(t) - m\ddot{x}] \quad (3-9)$$

比较(3-6)和(3-9)两式得出

$$\tilde{f} = k^{-1} \quad (3-10)$$

上式表明结构的柔度矩阵和刚度矩阵互为逆阵。由位移互等定理知 $\tilde{f}_{ij} = \tilde{f}_{ji}$ ，因此

$$\tilde{f}^T = \tilde{f}$$

即柔度矩阵是对称的，从而刚度矩阵也是对称的，即 $k_{ij} = k_{ji}$ 。利用能量原理，还可以证明，对于稳定结构，这两个矩阵都是正定的。

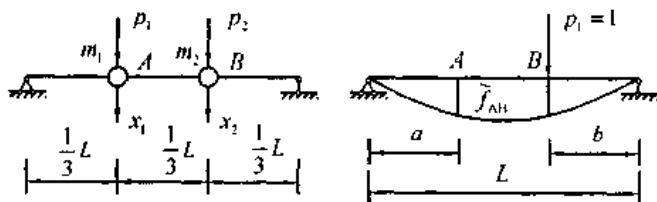


图 3-7 两自由度简支梁算例

例3-1 写出图3-7所示两自由度简支梁作横向振动的位移方程。假定梁的抗弯刚度为 EI ，集中质量和所作用的动荷载如图示。

[解] 由材料力学知，对图3-7所示简支梁，当 B 点作用单位荷载时 A 点的挠度为

$$\tilde{f}_{AB} = \frac{ab}{6EIL}(L^2 - a^2 - b^2)$$

由上式算出下列柔度影响系数

$$\tilde{f}_{11} = \tilde{f}_{22} = \frac{8L^3}{486EI}, \quad \tilde{f}_{21} = \tilde{f}_{12} = \frac{7L^3}{486EI}$$

因此结构的柔度矩阵为

$$\tilde{f} = \frac{L^3}{486EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

由(3-6)式，梁作横向振动的位移方程为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{L^3}{486EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

3.4 结构特性矩阵的计算与动力问题的有限元列式

前一节讨论了具有集中质量离散体系运动方程的建立。在那里，质量已离散到各个节点，杆件被看作无质量的弹簧，这样结构就成为质量弹簧体系，并且只考虑了节点的平移自由度。实际结构不是这种质量弹簧体系，而是分布参数体系，具有无穷多个自由度。本节讨论如何用有限元法把分布参数体系离散为具有有限个自由度的多自由度体系，并建立其运动方程。

考察图3-8所示梁式结构的离散化。为了得到较为精确的挠曲形状，可用第1章介绍的广义位移法和这里将要讨论的有限元法进行离散。两种方法都可以选择多个(例如 n 个)形状函数 $\psi_i(x)$ 和相应的位移幅值 $x_i(t)$ ，然后把位移表达为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) x_i(t) \quad (3-11)$$

这样，当 $x_i(t)$ 取不同值时，梁的位移形状和幅值都随时间变化。应当看到，两种方法在(3-11)式中的含义是有区别的：①在广义位移法中， $\psi_i(x)$ 代表指定的位移模式，它可在整个结构

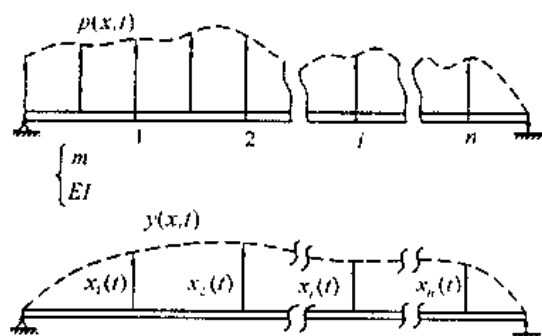


图 3-8 梁式结构的离散化

性相适应,才能形成一条很好的挠曲线。如变截面阶梯梁,应在截面突变处放置一个节点。每个节点可只取横向位移一个自由度(如图3-8示的那样),也可以取纵向位移和转角作为附加自由度。所有节点自由度之和便是结构的总自由度数。一般说来,所取自由度数越多,计算精度越高。但在许多情况下,只需较少的自由度便能获得较好的低频解。位移反应主要取决于低频解的值,这样就可以得到很好的近似结果。

方程(3-2)中的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和荷载向量统称为结构的特性矩阵。这些矩阵确定了,结构的运动方程也就得到了。下面先讨论一般三维动力问题的有限元列式,然后再讨论杆系结构矩阵的计算、线性近似及自由度的缩减。

考虑图3-9所示任意三维物体,建立总体坐标系 XYZ , 任意一点的位移为

$$u = [U \quad V \quad W]^T$$

上式是列向量

$$u = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

的简写形式,以下同。设三维物体上作用有

$$\text{体力} \quad f^B = [f_X^B \quad f_Y^B \quad f_Z^B]^T$$

$$\text{表面力} \quad f^S = [f_X^S \quad f_Y^S \quad f_Z^S]^T$$

在点 i 作用有集中力

$$F^i = [F_X^i \quad F_Y^i \quad F_Z^i]^T$$

任意一点的应变为

$$\epsilon = [\epsilon_X \quad \epsilon_Y \quad \epsilon_Z \quad \epsilon_{XY} \quad \epsilon_{YZ} \quad \epsilon_{ZY}]^T$$

应力为

上取非零值; $x_i(t)$ 代表指定位移模式的幅值。

②在有限元法中,是将结构分为由节点相连接的若干个单元, $\psi_i(x)$ 为某个小区域的位移模式,仅在这个小区域内取非零值; $x_i(t)$ 为指定的节点位移的幅值。

对于图示简支梁,有限元法把梁分为若干个单元,这些单元可以等长,也可以不等长。单元和单元之间由节点连接,所有节点位移 $x_1(t)$, $x_2(t)$, \dots , $x_n(t)$ 便可确定梁的挠曲形状。因此,节点的分布必须与梁的主要物理特

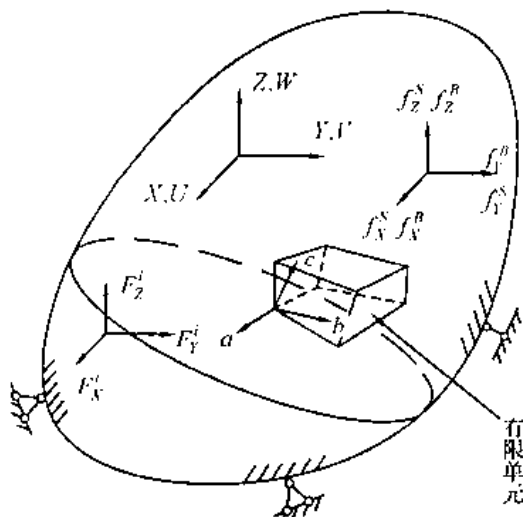


图 3-9 一般三维物体

$$s = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

应力和应变应满足物性关系

$$s = Ee \quad (3-12)$$

这里 E 为弹性常数矩阵, 即

$$E = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

称

式中, E 为弹性模量, μ 为泊松比, 应变位移满足相容条件

$$e = Du \quad (3-13)$$

式中, D 为微分算子, 对于三维问题

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial}{\partial Z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} \end{bmatrix}^T$$

在变形体满足平衡条件的状态下, 引入一组虚位移 δu , 它在内部产生协调的虚变形 δe 。由虚功原理, 内力虚功等于外力虚功

$$\int_V \delta e^T s dV = \int_V \delta u^T f^B dV + \int_S \delta u^T f^S dS + \sum_i (\delta u^i)^T F^i \quad (3-14)$$

式中, V 为物体的体积, S 为物体的表面积。

按照有限单元法把物体划分为若干个单元, 单元与单元之间由节点相联结, 每个单元的节点都位于其边界上。

在推导(3-14)式时, 所考虑的三维体完全是任意的, 坐标也是任意选定的。因此, 如果用单元 e 的局部坐标系 xyz 来定义各个向量: 位移向量、应变向量、应力向量和各个力向量, 经过同样的推导, 可以建立该单元的虚功表达式。这个表达式在形式上与(3-14)式完全相同, 唯一的区别是各个积分是在单元的局部坐标系下进行的, 且积分区域为单元的体积 V_e 或表面积 S_e 。为了书写简便, 直接将(3-14)式作为单元的虚功表达式来运用, 不再对单元 e 写出这个表达式。

在有限元法中, 单元内部的位移是以节点位移来表述的。假定在局部坐标系下, 选择了 m 个节点位移分量 $U_i (i=1, 2, \dots, m)$ 来表示单元内位移, 这些分量构成位移列向量

$$U = [U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_m]^T$$

在动力问题中, 各个分量都是时间 t 的函数, 则单元内位移可以写为

$$u = \psi(x, y, z)U \quad (3-15)$$

式中 $\psi(x, y, z)$ 为 $3 \times m$ 阶形状函数阵，它仅仅是单元局部坐标 xyz 的函数。

将(3-15)式代入(3-13)式，则应变的表达式变为

$$\varepsilon = Du = BU \quad (3-16)$$

式中

$$B = D\psi \quad (3-17)$$

是微分算子 D 作用于形状函数 E 的结果，称为应变——节点位移关系阵，也仅仅是坐标的函数。对于三维问题，它是 $6 \times m$ 阶矩阵。

将(3-12)、(3-15)和(3-16)三式代入虚功方程(3-14)，得

$$\begin{aligned} \delta U^T \int_{V_e} B^T E B dV U = \delta U^T \int_{V_e} \psi^T f^B dV + \\ \delta U^T \int_{S_e} \psi^T f^S dS + \delta U^T F \end{aligned} \quad (3-18)$$

这里假定集中荷载作用处均取为节点，尽管这样做并不一定都是必须的。这样单元的虚位移 δu 可以用节点虚位移 δU 来表示。每一个节点位移方向都作用有集中荷载，这些荷载分量构成 m 维列向量 F ，在无集中力作用处， F 的对应分量为零。

这样，就得到在局部坐标系下，单元刚度矩阵

$$k^e = \int_{V_e} B^T E B dV \quad (3-19)$$

和一致节点荷载列阵

$$p_{eq} = \int_{S_e} \psi^T f^S dS \quad (3-20)$$

这两个矩阵，在计算力学中我们已学过如何计算了。在动力问题中，唯一不同的是表面力是时间 t 的函数

$$f^S = f^S(x, y, z, t)$$

在积分过程中，只要把 t 看作常量，不参与积分就行了。在某些情形中，时间变量可以分离出来，表面力可以表示为

$$f^S = a(x, y, z)\zeta(t)$$

这时(3-20)式就变为

$$p_{eq} = \zeta(t) \int_{S_e} \psi^T a(x, y, z) dS$$

使节点荷载的计算得到简化。

现在来看(3-18)式中的体力项。在动力问题中，应考虑体力包括达朗贝尔力和阻尼力。用 ρ 表示单位体积中的质量， c 表示阻尼系数，假定阻尼是粘滞性的，则单位体积内分布的体力为

$$f^B = -\rho \ddot{u} - c \dot{u}$$

式中的负号表示达朗贝尔力和阻尼力分别与加速度和速度的方向相反。将(3-15)式对时间 t 微分，代入上式，得

$$f^B = -\rho \psi \ddot{U} - c \psi \dot{U}$$

将这个表达式代入方程(3-18)中的体力项，则有

$$\int_{V_e} \psi^T f^B dV = - \int_{V_e} \rho \psi^T \psi dV \ddot{U} - \int_{V_e} c \psi^T \psi dV \dot{U} \quad (3-21a)$$

这就给出了在局部坐标系下单元质量矩阵和阻尼矩阵的算式

$$m^e = \int_{V_e} \rho \psi^T \psi dV \quad (3-21b)$$

$$c^e = \int_{V_e} c \psi^T \psi dV \quad (3-21c)$$

(3-21)式给出的单元质量矩阵所用的插值函数与计算单元刚度矩阵的一致, 因此把它叫做一致质量矩阵。尽管阻尼矩阵有(3-21c)式给出的算式, 但实际结构的阻尼系数 c 只能根据类似结构的实验来确定, 以此来计算结构阻尼矩阵。

将(3-19)、(3-20)和(3-21)三式代入(3-18)式, 得

$$\delta U^T k^e U = \delta U^T (-m^e \ddot{U} - c^e \dot{U} + p_{eq} + F) \quad (3-22)$$

现把局部坐标系中的单元位移向量 U 变为总体坐标系中的单元位移向量 \bar{U} 。设从局部坐标到总体坐标变换阵为 λ^T , 它由 $m \times m$ 个方向余弦组成, 且本身满足正交条件

$$\lambda^T \lambda = I$$

在两个坐标系下节点位移向量的关系为

$$U = \lambda \bar{U}$$

对各个列向量都进行了同样的变换, 这样(3-22)式就成为

$$\delta \bar{U}^T \bar{k}^e \bar{U} = \delta \bar{U}^T (-\bar{m}^e \ddot{\bar{U}} + \bar{c}^e \dot{\bar{U}} + \bar{p}_{eq} + \bar{F}) \quad (3-23)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}^e &= \lambda^T k^e \lambda \\ \bar{m}^e &= \lambda^T m^e \lambda \\ \bar{c}^e &= \lambda^T c^e \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3-24)$$

分别表示总体坐标系下的单元刚度矩阵和单元质量矩阵。

用 n 维列向量 $x(t)$ 来表示结构位移向量, 它包含全部可动节点位移分量。单元 e 的节点位移向量 \bar{U}^e 和结构位移向量 x 可用 $m \times n$ 阶布尔矩阵 A^e 连系起来

$$\bar{U}^e = A^e x$$

布尔矩阵 A^e 每一行的 n 个元素中, 仅一个元素为1, 其余元素全部为零。例如, 假定 \bar{U}^e 的第一个分量 \bar{U}_1 与 x 的第 j 个分量 x_j 对应, 则布尔矩阵的第一行为

$$[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

↑

第 j 列

只是在推导过程中用布尔矩阵, 在结构刚度矩阵和质量矩阵的集合过程中并不用这个矩阵, 而按单元自由度与结构位移向量的分量的对应关系放置或累加单元阵的对应元素即可。

将单元位移向量、虚位移向量和加速度都用结构位移向量及其对应的物理量来表示, 则(3-23)式变为

$$\delta x^T (A^e)^T \bar{k}^e A^e x = \delta x^T (A^e)^T (-\bar{m}^e A^e \ddot{x} - \bar{c}^e A^e \dot{x} + \bar{p}_{eq} + \bar{F})$$

这仅仅是一个单元的虚功表达式, 将所有单元的虚功表达式累加起来, 就得到全结构的虚功表达式。注意到结构位移向量、虚位移向量和加速度向量与求和过程无关, 因此有

$$\delta x^T k x = \delta x^T (-m \ddot{x} - c \dot{x} + p) \quad (3-25)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} k &= \sum_e (A^e)^T \bar{k}^e A^e \\ m &= \sum_e (A^e)^T \bar{m}^e A^e \\ c &= \sum_e (A^e)^T \bar{c}^e A^e \\ p(t) &= \sum_e (A^e)^T (\bar{p}_{eq} + \bar{F}) \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

分别表示结构的刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵和结构的荷载向量。

因为虚位移 δx 是任意的，例如可以依次使结构在每个位移分量方向上产生单位虚位移，这样(3-25)式中的虚位移向量 δx 就变为单位矩阵 I ，从而导出结构运动方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \quad (3-27)$$

这是动力问题一般有限元列式的主要过程。与静力问题的有限元列式过程比较，有以下异同。

1) 特性矩阵的计算

① 在局部坐标系下，动力问题与静力问题单元刚度矩阵的计算相同，一致节点荷载的计算也相同。对于动力问题来说，只需把时间变量看作常量就行了。但动力问题多了单元质量矩阵的计算，可用(3-21b)式来计算单元的一致质量矩阵。

② 从(3-24)式看，单元刚度矩阵和质量矩阵从局部坐标到整体坐标的变换过程是相同的。

③ 从(3-26)式来看，结构刚度矩阵和结构的一致质量矩阵的集合过程是相同的，因此两者非零元素的位置也是相同的。更进一步讲，两者都是带状的，且带宽相等。但是如果某个节点有集中质量，算出一致质量矩阵 m 后，应在 m 中与该节点的所有平移自由度对应的对角元素上累加这个集中质量，这并不会影响质量矩阵原有的带状性。

2) 支座处理

① 静力问题的基本方程是

$$kx = p$$

在位移向量 x 和荷载向量 p 中包含了所有自由度(可动的和约束的)方向上的分量。在进行支座处理之前，刚度矩阵 k 是降秩不可逆的，通过主元赋大值或充零法进行支座处理后，它才是对称正定的，方程才能解。

② 在动力问题的运动方程(3-27)中，位移向量 $x(t)$ 和荷载向量 $p(t)$ 本身不包含约束自由度方向的分量，因此在结构刚度矩阵和一致质量矩阵的集合过程中就不累加与约束自由度对应的项，所以这两个矩阵本身就是对称正定的，集合完成后不需要再作支座处理。

尽管前面讨论的动力问题的有限元列式是针对一般三维问题来建立的，但下面所举的例题只涉及到平面一维匀质等截面杆元这种简单情形。假定杆元的长度为 L ，弹性模量为 E ，横截面积为 A ，质量密度为 ρ ，则单位长度上的质量可表示为 $\bar{m} = A\rho$ 。

例3-2 图3-10所示平面桁架单元仅有轴向位移和变形。试写出单元特性矩阵。

[解] 用节点位移的线性插值式来表示单元内位移, 有

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \Psi(x)U$$

应变

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = BU$$

弹性常数矩阵 E 为 1×1 阶矩阵。利用(3-19)式, 单元刚度矩阵

$$k^e = \int_{V_e} B^T E B dV = \int_0^L \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{L} A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

利用(3-21b)式, 单元质量矩阵

$$m^e = \int_{V_e} \rho \Psi^T \Psi dV = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \left(\frac{x}{L}\right)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{\bar{m}L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

例3-3 图3-11所示平面梁单元的主要变形是弯曲变形, 即由弯曲引起的轴向变形, 忽略剪变形的影响。试写出单元特性矩阵。

[解] 利用平面假定, 单元

内任意一点的轴向位移为

$$u(x, y) = -y \frac{dv}{dx}$$

式中 $v = v(x)$ 表示单元轴线的横向位移。从图中看出, 当 v 为正, $\frac{dv}{dx} > 0$ 时, 在 $y > 0$ 区域 u 为

负, 故 $u = -y \frac{dv}{dx}$ 。取图3-11(a)所示的4个节点位移来表示横向位移 $v(x)$ 。利用埃尔米特 (Hermit) 插值, 有

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} & x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & \left(\frac{x}{L}\right)^2\left(3 - \frac{2x}{L}\right) & \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \Psi(x)U \quad (3-28)$$

因此, 轴向应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} = -y \psi''(x)U = -\frac{y}{L^2} \begin{bmatrix} 12x - 6 & 6x - 4L & 6 - \frac{12x}{L} & 6x - 2L \end{bmatrix} U = BU$$

将矩阵 B 代入(3-19)式, 单元刚度矩阵成为

$$k^e = \int_{V_e} B^T E B dV = \frac{E}{L^3} \int_0^L \left(\int_A y^2 dA \right) \bar{B}^T \bar{B} dx$$

因为上式中圆括号内的积分为截面惯性矩

$$I = \int_A y^2 dA$$

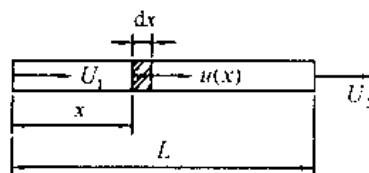
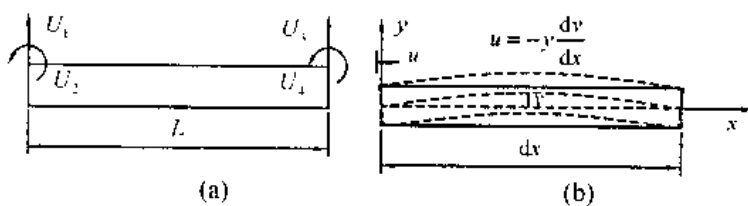


图 3-10 平面行架单元



(a) 梁单元 (b) 变形微段
图 3-11 平面弯曲梁单元

所以

$$k^e = \frac{EI}{L^4} \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{B}} dx = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

单元质量矩阵

$$\begin{aligned} m^e &= \int_{V_e} \rho \psi^T \psi dV = \rho A \int_0^L \psi^T \psi dx = \\ &= \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-30)$$

(3-12)式中的应力向量和应变向量可以用广义的应力向量和应变向量代替。此时，相应的弹性常数矩阵也用广义的，这样计算就更为简单。例如对于前例的平面梁单元，以轴线的曲率 $\eta(x)$ 作为广义应变，它与位移 v 的关系为

$$\eta(x) = v''(x)$$

利用(3-28)式，曲率可以表示为

$$\eta(x) = v''(x) = \psi'' U$$

相应的广义应力为横截面弯矩 $M(x)$ ，按惯例规定凸面向下的弯矩为正，因此

$$M(x) = EI\eta(x) = EIv'' = EI\psi'' U$$

这样单元刚度矩阵的计算就简化为一维积分(ψ'' 相当于 \mathbf{B} ， EI 相当于 E)

$$k^e = \int_0^L EI \psi''^T \psi'' dx \quad (3-31)$$

仍然可以得到(3-29)式的结果。同样和单位长度上的质量 $\bar{m} = \rho A$ ，单元质量矩阵的计算也可以简化为

$$m^e = \int_0^L \bar{m} \psi^T \psi dx \quad (3-32)$$

对于变截面非均匀梁，只需用点 x 处的抗弯刚度 $EI(x)$ 和分布质量 $m(x)$ 代替以上两式中的对应量，便可以求出相应的单元矩阵。

3.5 特性矩阵的线性近似

除了前一小节介绍的一致节点荷载和一致质量矩阵外，这两个特性矩阵的计算还可以进一步简化，采用线性近似的方法来计算，从而使体系自由度的数目和求解运动方程所需的计算工作量都大为减少。

3.5.1 分布荷载的线性近似

利用简单的静力学原理计算各单元的分布荷载的等效节点荷载，然后把汇聚于某节点所有单元的等效节点荷载累加起来，便得到了作用于该节点的外荷载。例如，对于图3-12

所示的简支梁，要计算作用于单元 e 的分布荷载的等效节点荷载，可以把单元 e 看作支撑在其节点上的简支梁，梁上作用有同样的荷载，然后计算它的支座反力，便可以确定这个单元的等效节点荷载。根据端点力矩为零，有

$$R_2 L = \int_0^L x p(x, t) dx$$

$$R_1 L = \int_0^L (L-x) p(x, t) dx$$

从而可求得支座反力 $R_k (k=1, 2)$ 。它们等于单元 e 传递给节点的力，但方向相反，这个力便是单元 e 的等效节点荷载。因此，单元 e 的等效节点荷载为

$$R_k = \int_0^L \psi_k(x) p(x, t) dx, \quad (k=1, 2)$$

式中

$$\psi_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad \psi_2(x) = \frac{x}{L}$$

显然这样做相当于采用线性插值式来计算单元的等效节点荷载。对于承受均布荷载 $p(x, t) = \bar{p}(t)$ 的单元来说，单元的等效荷载 $R_1 = R_2 = 0.5 \bar{p}(t) L$ 。把与节点 i 相邻单元的等效节点荷载累加起来，就得到作用于节点 R_i 的外荷载。用这样的方法只能产生平移自由度方向的广义力，除非外力矩直接施加在节点处，否则荷载向量中的转动分量为零。

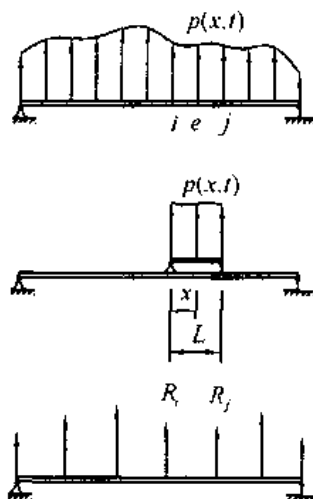


图 3-12 外荷载的线性近似

3.5.2 集中质量矩阵

表示结构惯性特性的最简单方法是把结构的质量集中于节点，然后每个可动节点都看作为一个质点，因此只有在结构的平移自由度方向才有惯性力，而转动方向的惯性力为零。这样便可以得到一个对角的集中质量矩阵。以图3-13所示的两端固定的梁为例，把梁划分为若干个单元，每个单元的质量都按静力的方法分配给它的节点。例如对于匀质等截面杆单元，则把其总质量的一半分配给它两端的节点。节点 i 处的集中质量 m_i 等于汇聚于该节点的所有单元分配质量之和。把节点 i 看作质量为 m_i 的质点，因此节点 i 在任何一个平移自由

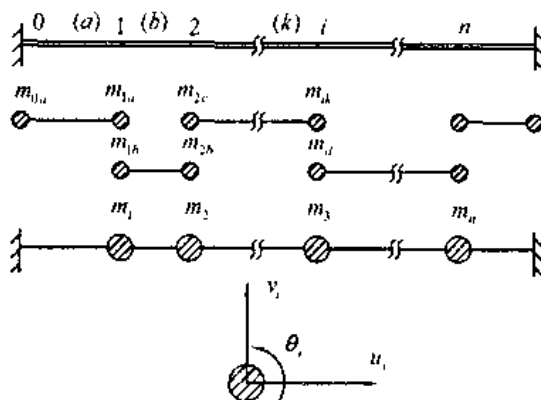


图 3-13 在梁节点上的集中质量

度方向上产生单位加速度所需要的在该方向施加的作用力都是 m_i 。由于质点的转动惯量为零,因此在节点 i 的转动自由度方向上不存在惯性力,所需施加的作用力也为零。如图3-13所示,假定每个节点取三个自由度,两个平移自由度和一个转动自由度,若把节点 i 的位移向量排列为

$$V_i = [u_i \quad v_i \quad \theta_i]^T$$

在结构质量矩阵中,与这个位移向量相对应的对角块为对角阵

$$m_{ii} = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

若按节点顺序来排列结构位移向量的分量,即

$$x = [V_1^T \quad V_2^T \quad \cdots \quad V_n^T]^T$$

则结构质量矩阵是对角阵

$$m = \begin{bmatrix} m_{11} & & & \\ & m_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_{nn} \end{bmatrix}$$

质量矩阵的非对角块为零,这是因为任何一个质点的加速度只在本点产生惯性力,也只需在本点施加作用力来与它保持平衡。

按照结构位移向量分量的不同排列顺序,结构质量矩阵也有不同的形式。为了便于求解,常常把平移自由度排在前面,转动自由度排在后面,以 x_t 来表示平移自由度, x_θ 来表示转动自由度。对于前述的结构,这两个向量为

$$x_t = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_n \quad v_n]^T$$

$$x_\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_n]^T$$

结构的位移向量为

$$x = [x_t^T \quad x_\theta^T]^T$$

对应的集中质量矩阵为

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_n & & \\ & & & & m_n & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_n & | & 0 \\ - & - & - \\ 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

显然当位移向量 x 中包括转动自由度时,结构的集中质量矩阵是一个降秩的对角阵,其秩数(在这里为 $2n$)正好等于位移向量中平移自由度的数目,这正是第1章定义的动力自由度。

如果每个节点只取横向位移一个平移自由度, 即

$$\mathbf{x} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^T$$

那么结构质量矩阵就变为

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

这是一个满秩的对角阵。也就是说, 当位移向量 \mathbf{x} 中仅包含平移自由度时, 对应的集中质量矩阵是一个满秩的对角阵。在此情况下, 体系的动力自由度数, 正好等于位移向量的维数。

在前面的讨论中我们看到, 对于质量和外荷载的计算可以采取两种不同的近似方法:

① 只考虑结构平移自由度的初级近似。初级近似的优点在于: 列式简单, 单元特性的计算和结构特性矩阵的集合过程都很简单; 结构特性矩阵的形式简单, 特别是集中质量矩阵是对角阵; 所考虑的自由度数大为减少。这种近似方法具有计算工作量小, 能获得较好的近似解的优点, 因此它在工程中被广泛地采用, 特别是对梁、柱和框架等结构来说, 其应用更为普遍。

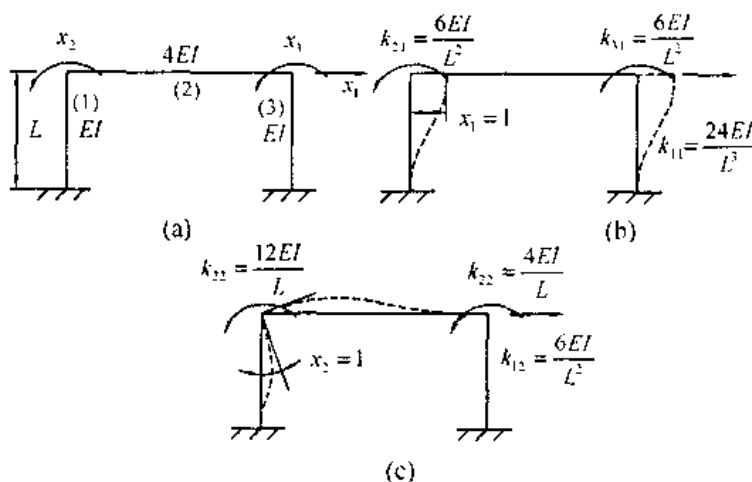
② 考虑平移和转动的一致近似。一致近似的好处是用统一的形状函数来计算单元特性矩阵, 给编程序上机计算带来一定方便; 能提高解的精度特别是能给出较准确的高频解。但这种近似方法因自由度数多, 计算工作量大, 对于只需求少数低频解的问题来说, 特别是用手算来解动力问题时, 往往采用线性近似, 而不采用一致近似。

3.6 框架结构运动方程的建立

框架结构原则上可考虑所有可动节点自由度, 按3.4节讨论的一般有限元列式过程来建立其运动方程。但在动力问题中, 常常忽略杆件的次要变形——轴向变形, 使自由度数大为减少, 而又能获得较好的低频解。下面以一个例题来说明, 在忽略轴向变形的情况下, 如何由影响系数的定义, 利用(3-29)和(3-30)两式给出的单元刚度矩阵和单元质量矩阵直接建立结构的相应特性矩阵。显然, 得到了结构的这个两特性矩阵, 立即就可以写出结构的运动方程。

例3-4 集合图3-14(a)所示框架结构的刚度矩阵和质量矩阵, 其分布质量示于图3-14(a)。

【解】 将每根杆视作一个单元, 其编号如图示。忽略杆



(a) 框架特性 (b) $x_1 = 1$ 时施加的力 (c) $x_2 = 1$ 时施加的力

图 3-14 框架刚度系数分析

件的轴向变形, 这个框架有三个自由度。根据刚度影响系数的定义, 依次使结构在每个自由度方向上产生单位位移, 同时约束其余两个自由度方向上的位移。由结构自由度与单元自由度的对应关系和(3-29)式, 可以确定在指定条件下各个单元产生的相应位移和所需施加的力。再利用自由度的对应关系便得到在结构各个自由度方向上所需施加的力, 这样便能逐列求出结构刚度矩阵中的元素。

按定义, 结构刚度矩阵第一列的元素 k_{1i} 为当 $x_1 = 1$ 时所需要的在 x_i 方向上施加的力。为此让结构产生如图3-14(b)所示的侧向位移, 显然通过单元(2)这个位移要刚性地传递给单元(1), 因此单元(1)和(3)都在各自的 U_1 方向上产生了单位位移。在此条件下, 在结构的 x_1 方向上施加的力为

$$k_{11} = k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(3)} = \frac{24EI}{L^3}$$

单元(1)在 U_1 方向上产生单位位移时, 需要在 U_2 方向上施加的力为 $k_{21}^{(1)}$, 它正好等于在结构 x_2 方向上所需施加的力。因此

$$k_{21} = k_{21}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}$$

同样

$$k_{31} = k_{31}^{(3)} = \frac{6EI}{L^2}$$

这样便求出结构刚度矩阵第一列的元素。

如图3-14(c)所示, 再使结构在 x_2 方向上产生单位转角。这时单元(1)和(2)都在各自的 x_2 方向上产生单位位移, 因此在结构的 x_2 方向上所需施加的力为

$$k_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} = \frac{4EI}{L} + \frac{(2L)^2 16EI}{(2L)^3} = \frac{12EI}{L}$$

在单元(1)的 U_1 方向上施加的力等于在结构的 x_1 方向上施加的力

$$k_{12} = k_{12}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}$$

在单元(2)的 U_4 方向上施加的力等于在结构的 x_3 方向上施加的力

$$k_{32} = k_{42}^{(2)} = \frac{8EI \times (2L)^2}{(2L)^3} = \frac{4EI}{L}$$

这样又求出结构刚度矩阵第二列的元素。

同样, 使结构在 x_3 方向产生单位转角, 又可求出结构刚度矩阵第三列中的元素。最后可得到结构刚度矩阵为

$$k = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(3)} & k_{21}^{(1)} & k_{31}^{(3)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(2)} & k_{42}^{(2)} \\ k_{31}^{(3)} & k_{42}^{(2)} & k_{44}^{(2)} + k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix}$$

各单元的分布质量如图3-15(a)所示。结构的集中质量矩阵很容易求得: 将各单元质量的一半集中到构件的两端, 如图3-15(b)所示。当结构在 x_1 方向上产生单位加速度 $\ddot{x}_1 = 1$ 时, 因为梁没有轴向变形, 所以两个可动节点都具有同样的平移加速度, 在结构的 x_1 方向上所需施加的力为

$$m_{11} = 2 \times (1.5 + 0.5) \bar{m} L = 4 \bar{m} L$$

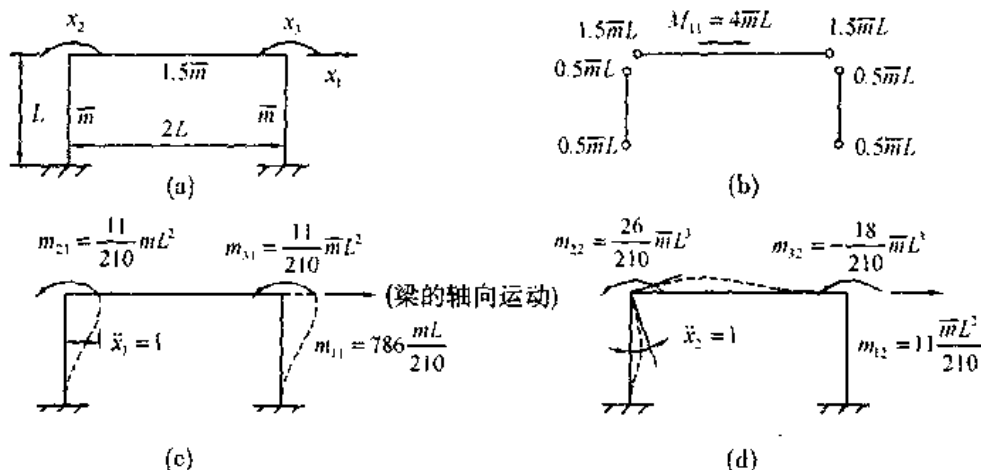


图 3-15 集中质量和一致质量矩阵的分析

由于质点没有转动惯量，集中质量矩阵的其他元素都为零，因此结构的集中质量矩阵为

$$m = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{bmatrix} 840 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

结构一致质量矩阵的组成过程与结构刚度矩阵的相类似。依次使结构在每个自由度方向上产生单位加速度，且同时使其余两个自由度方向上的加速度为零，利用(3-30)式便可以逐列定出结构的一致质量矩阵。但应当注意，当仅使结构在平移自由度 x_1 方向上产生单位加速度 $\ddot{x}_1 = 1$ ，用(3-30)式计算在 x_1 方向上所需施加的力 m_{11} 时，该式中的系数仅计算了对于单元①和单元③所需施加的横向力 $m_{11}^{(1)}$ 和 $m_{11}^{(3)}$ 。因此时单元②在 x_1 方向上作刚体运动，所以在结构 x_1 方向上施加的力应加上克服横梁在 x_1 方向上作刚体运动的惯性力，即单元②的质量 $3\bar{m}L$ 。其余质量系数的计算和刚度系数相类似。最后可得结构的一致质量矩阵为

$$m = \begin{bmatrix} m_{11}^{(1)} + m_{11}^{(3)} + 3\bar{m}L & m_{21}^{(1)} & m_{21}^{(3)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} + m_{22}^{(2)} & m_{32}^{(2)} \\ m_{31}^{(3)} & m_{42}^{(2)} & m_{44}^{(2)} + m_{22}^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{bmatrix} 786 & 11L & 11L \\ 11L & 26L^2 & -18L \\ 11L & -18L^2 & 6L^2 \end{bmatrix}$$

3.7 静力凝聚

考虑结构的运动方程(3-2)，当结构的阻尼为零，施加的外荷载为零时，无阻尼体系自由振动的运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3-35)$$

与单自由度体系的情况相类似，假定多自由度体系的自由振动是简谐运动，可写成

$$x(t) = e^{i\omega t} \dot{x} \quad (3-36)$$

式中 \dot{x} 为振动形状, 简称为振型。它不随时间变化, 只是表明振幅的大小。将上式代入(3-35)式, 消去公因子 $e^{i\omega t}$, 则得到无阻尼体系的特征方程

$$(k - \omega^2 m) \dot{x} = 0 \quad (3-37)$$

假定结构具有 n 个自由度, 其中有 n_t 个平移自由度和 n_θ 个转动自由度, 则体系的总自由度数 $n = n_t + n_\theta$ 。

当采用一致质量矩阵时, 结构质量矩阵 m 是对称正定的, 因此从方程(3-37)可以解出体系的 n 个特征对 ω_i^2 , $\dot{x}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。

当采用集中质量矩阵时, 质量矩阵 m 是(3-33)式给出的降秩对角阵, 因此方程(3-37)必须实施静力凝聚才能求解。

静力凝聚的过程如下: 以 \dot{x}_t 表示结构的平移位移向量, \dot{x}_θ 表示结构的转动位移向量, 它们分别是 n_t 维和 n_θ 维列向量。将结构振型向量中分量的顺序排列为 $\dot{x} = [\dot{x}_t^T \quad \dot{x}_\theta^T]^T$, 结构质量矩阵中元素的顺序也作相应的调整, 则可以按分块的形式写出特征方程(3-37)

$$\begin{bmatrix} k_{tt} & k_{t\theta} \\ k_{\theta t} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_\theta \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{x}_\theta \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

展开上式的第二个矩阵方程

$$k_{\theta t} \dot{x}_t + k_{\theta\theta} \dot{x}_\theta = 0$$

因为结构刚度矩阵 k 是对称正定的, 其主子阵 $k_{\theta\theta}$ 也是对称正定的。因此从上式可以解出转动位移向量

$$\dot{x}_\theta = -k_{\theta\theta}^{-1} k_{\theta t} \dot{x}_t$$

将上式入(3-38)式的第一个矩阵方程, 可得到凝聚后的特征方程

$$k_t \dot{x}_t = \omega^2 m_{tt} \dot{x}_t \quad (3-39)$$

式中

$$k_t = k_{tt} - k_{t\theta} k_{\theta\theta}^{-1} k_{\theta t} \quad (3-40)$$

这样就把 n_θ 个转动自由度凝聚掉了, 变为(3-39)式所示的仅含 n_t 个平移自由度的特征方程, 使自由度数大为减少。

例3-5 从例3-4算得的刚度矩阵中消去两个转动自由度对应的元素, 得到与集中质量矩阵相匹配的刚度矩阵。

【解】 因为体系只有一个平移自由度 ($n_t = 1$), 所以凝聚后的刚度矩阵 k_t 是 1×1 阶的。与例3-4转动自由度对应的刚度子阵是

$$k_{\theta\theta} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix} = \frac{4EI}{L} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

它的逆矩阵是

$$k_{\theta\theta}^{-1} = \frac{L}{32EI} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

然后, 利用(3-40)式可算凝聚后的刚度矩阵

$$k_t = \frac{2EL}{L^3} \left(12 - \frac{2EI}{L^3} \cdot \frac{L}{32EI} [3L \quad 3L] \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3L \\ 3L \end{bmatrix} \right) = \frac{39EI}{2L^3}$$

凝聚后的特征方程为

$$(19.5 \frac{EI}{L^3} - 4\bar{m}L\omega^2)x_1 = 0$$

3.8 频率向量与振型阵

重新写出无阻尼多自由度体系的广义特征方程(3-37)

$$(k - \omega^2 m)\dot{x} = 0$$

如前所述, 对于一致质量矩阵, m 本身是对称正定的; 对于集中质量矩阵, 假定已进行静力凝聚, m 是满秩的对角阵, 其对角元全为正, 故仍然是对称正定的。在这两种情况下, 刚度矩阵 k 和质量矩阵 m 都是对称正定的。为不失一般性, 假定向量 \dot{x} 中有 n 个分量, 且两个系数矩阵都是 n 阶方阵。以后, 凡提到方程(3-37), 均按上述含义来理解, 不再重复。

从数学上讲, 求广义特征方程(3-37)的解就是要找到某个广义特征根 ω_i^2 , 及其对应的广义特征向量 $\dot{x}_i \neq 0$, 它们满足方程(3-37)。

方程(3-37)可看作系数矩阵含未知量 ω^2 的关于未知向量 \dot{x} 的齐次方程。从线性代数知, 齐次方程有非零解的充要条件是其系数阵的行列式为零

$$\det(k - \omega^2 m) = 0 \quad (3-41)$$

展开这个方程可以得到关于 ω^2 的 n 次代数方程, 求解这个代数方程可以求得方程(3-37)的 n 个特征根 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ 。这 n 个特征根确定后, 体系的振动频率, 也就确定了, 因此称方程(3-41)为频率方程。可以证明, 当刚度矩阵 k 和质量矩阵 m 都是实对称正定阵时, 这 n 个特征根都是正的实数。把它们按以小到大的顺序排列起来, 即

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$$

为了简单, 假定方程(3-41)没有重根, 即上式中的小于等于号只取小于号(上式取等式即为“重频”情况, 将于第5章讨论)。

将任意一个特征根 ω_i^2 代入特征方程(3-37), 得到关于特征向量 \dot{x} 的齐次代数方程

$$(k - \omega_i^2 m)\dot{x}_i = 0 \quad (3-42)$$

显然其系数矩阵是元素为常量的降秩矩阵。由于特征根 ω_i^2 是单重根, 故上式的系数矩阵秩数只降一阶, 即其秩为 $n-1$ 。因此, 未知向量 \dot{x}_i 中有一个且只有一个待定常数, 同时(3-42)式的 n 个方程中有一个且只有一个是不独立的。特别地取 \dot{x}_i 的最后一个分量 $\dot{x}_{ni} = 1$, 即

$$\dot{x}_i = [\dot{x}_{1i} \quad \dot{x}_{2i} \quad \dots \quad \dot{x}_{(n-1)i} \quad 1]^T \quad (3-43)$$

假定(3-42)式最后一个方程不独立, 把它划去, 并把前 $n-1$ 个方程的最后一列移到等号右边, 得到

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \omega_i^2 m_{11} & \dots & k_{1(n-1)} - \omega_i^2 m_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1} - \omega_i^2 m_{(n-1)1} & \dots & k_{(n-1)(n-1)} - \omega_i^2 m_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1i} \\ \vdots \\ \dot{x}_{(n-1)i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{1n} - \omega_i^2 m_{1n} \\ \vdots \\ k_{(n-1)n} - \omega_i^2 m_{(n-1)n} \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

因为方程(3-42)的系数矩阵只降一秩, 所以它去掉一行和一列的主子阵(即上式的系数矩阵)是满秩可逆的。因此从上式可以求出特征向量 \dot{x}_i 的其余 $n-1$ 个分量, 然后由(3-43)式组成

\dot{x}_i 。应当指出,取特征向量的最后一个分量为1并不总是最好的,若取特征向量的最大分量为1,则能改善计算精度。当然在任何情况下都可以采用同样的求解过程,只要适当地重新排列 \dot{x}_i 中分量的顺序即可。

在结构动力问题中,特征根(也称为特征值)和特征向量都有确定的物理意义。第 i 个特征值 ω_i^2 是体系第 i 个振动频率 ω_i 的平方,其对应的特征向量 \dot{x}_i 代表体系的第 i 个振型。将全部频率按照从低频到高频的次序排列起来就组成一个向量

$$\omega = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n]^T \quad (3-45)$$

这个向量称为频率向量。

对应的 n 个振型列向量排列起来组成一个矩阵,这个矩阵称为振型阵。为了方便,通常把每一个振型都除以它的某个基准分量(通常取绝对值最大者),把振型向量表示为无量纲的形式。如取第 i 个振型 \dot{x}_i 中的分量 \dot{x}_{ni} 为基准分量,则这个振型的无量纲形式是

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{bmatrix} = \frac{1}{\dot{x}_{ni}} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1i} \\ \vdots \\ \dot{x}_{(n-1)i} \\ \dot{x}_{ni} \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

这个向量仍叫做体系的第 i 个振型,显然它仍然满足方程(3-42)。如果基准分量是原来振型向量 \dot{x}_i 中绝对值最大的分量,则振型 φ_i 中的最大分量为1。

将所有振型都化为无量纲形式,然后由这些无量纲振型排列为振型阵

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_n] \quad (3-47)$$

例3-6 计算图3-16所示框架的频率和振型。

【解】如图3-16所示,假定横梁是刚性的,且集中了绝大部分质量,柱为无重杆,这便是一个质量弹簧体系。若只考虑侧向位移,则结构仅有三个自由度。易知:

$$k = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

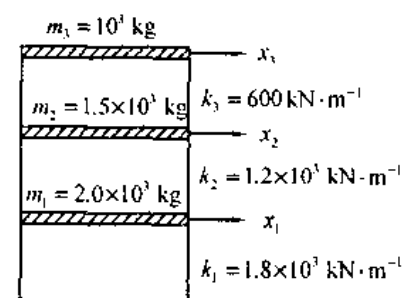


图 3-16 例 3-6 所用的框架

由此可得

$$k = 600 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}, \quad m = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$$

质量矩阵的单位是由 $10^3 \text{ kg} = (10^3 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1} = \text{kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ 得到的,这样写的目的是为了看清特征方程系数阵的单位。利用这两个矩阵,特征方程(3-37)的系数阵成为

$$k - \omega^2 m = 600 \begin{bmatrix} 5 - 2B & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 1.5B & -1 \\ 0 & -1 & 1 - B \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1} \quad (a)$$

式中

$$B = \frac{1}{600} \omega^2 \quad (\text{b})$$

令(a)式中方阵行列式的值等于零, 展开这个行列式, 化简可以得到关于 B 的三次方程

$$B^3 - 5.5B^2 + 7.5B - 2 = 0$$

利用求根的数值方法, 可求得这个方程的根是 $B_1 = 0.351$, $B_2 = 1.61$, $B_3 = 3.54$ 。再由(b)式可得

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 \\ 966 \\ 2124 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{bmatrix} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

为了计算简单, 可直接用上面求得的 B_i 来计算第 i 个振型。注意到(3-43)式表达的特征向量 \dot{x}_i , 可以看作(3-46)式中取基准分量为 \dot{x}_{ni} 的结果, 为了书写简便下面用 ϕ_i 来替代 \dot{x}_i , 表示第 i 个振型。这样(3-42)式就成为

$$600 \left[\begin{array}{cc|c} 5-2B_i & -2 & 0 \\ -2 & 3-1.5B_i & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1-B_i \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

消去常数因子600, 实施分块矩阵的乘法运算, 然后划去最后一个方程, 再把前两个方程最后一列移到等号右边, 得

$$\begin{bmatrix} 5-2B_i & -2 \\ -2 & 3-1.5B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

这是(3-44)式的另一种表达形式。由上式可得

$$\begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-2B_i & -2 \\ -2 & 3-1.5B_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将前面算得的 B_i 代入上式, 就能求得结构的三个振型的前两个分量, 例如振型:

$$B_1 \approx 0.351$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.298 & -2 \\ -2 & 2.474 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6.631} \begin{bmatrix} 2.474 & 2 \\ 2 & 4.298 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.302 \\ 0.648 \end{bmatrix}$$

同样, 利用 B_2 和 B_3 的值可求得其余两个振型的前两个分量。各个振型最后一个分量的值均为1.0 ($\phi_{2i} = 1.0$), 因此结构的三个振型是

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0.302 \\ 0.648 \\ 1.00 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} -0.676 \\ -0.601 \\ 1.00 \end{bmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} 2.48 \\ -2.58 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

这三个振型示于图3-17中。

在振型图中, 包括支座在内, 位移为零的点称为节点。对于只有一个支座的结构来说, 振型的节点数正好等于振型的序号。根据这个原则, 当给定振型图后, 就可以判定它是第几个振型。

本节讨论的由作用力方程求解振动频率和振型的方法同样适用于位移方程。在(3-7)式

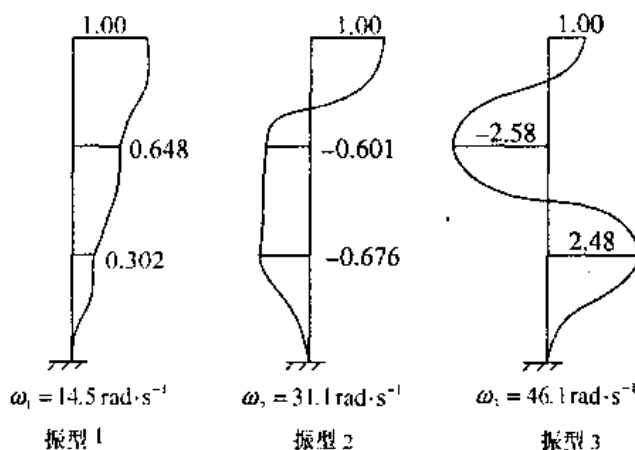


图 3-17 图 3-16 框架的振型

中, 令 $p(t) = 0$, 得到如下自由振动方程

$$\tilde{f} m \ddot{x} + x = 0 \quad (3-48)$$

将(3-36)式代入上式, 得

$$\left(\tilde{f} m - \frac{I}{\omega^2} \right) \dot{x} = 0 \quad (3-49)$$

式中 I 为 n 阶单位矩阵。如前所述, 要求得非零的振型 \dot{x} , 必须其系数矩阵行列式的值为零。这样就得到与(3-41)式相对应的方程

$$\det \left(\tilde{f} m - \frac{I}{\omega^2} \right) = 0 \quad (3-50)$$

由前面的方法, 可求得特征问题(3-49)的特征值 $\frac{1}{\omega_i^2}$ 。注意它代表频率平方的倒数, 而不是频率的平方。由方程(3-41)和(3-50)都能求得体系的振动频率, 因此把这两个方程都叫做频率方程。求得振动频率后, 求振型的方法与前述完全相同。如果不计比例常数, 在两种情况下求得的振型是一致的。

在用计算机求解时, 总希望特征方程(3-50)中的系数矩阵是对称的, 这样可以减小存储量。但在该式中, $\tilde{f}m$ 一般不具有对称性, 因此需要通过适当的变换, 保持系数矩阵的对称性, 这种变换将在第6章中讲到。

3.9 正交条件

3.9.1 基本条件

多自由度体系自由振动的振型 φ_i , 具有非常重要的性质, 它们在结构动力分析中是极其有用的。这些性质称为正交关系, 可以用数学方法来加以证明。

以无量纲的振型 φ_i 替代方程(3-42)中的 \dot{x}_i , 并把该式改写为

$$k\varphi_i = \omega_i^2 m\varphi_i \quad (3-51)$$

同样, 对于第 j 个振动频率和振型, 有

$$k\varphi_j = \omega_j^2 m\varphi_j \quad (3-52)$$

将(3-51)式两边转置, 然后右乘 φ_j , 由于 k 和 m 都是对称的, 得到

$$\varphi_i^T k\varphi_j = \omega_i^2 \varphi_i^T m\varphi_j \quad (3-53)$$

将(3-52)式两边左乘 φ_i^T , 得

$$\varphi_i^T k\varphi_j = \omega_j^2 \varphi_i^T m\varphi_j \quad (3-54)$$

(3-53)式减去(3-54)式得

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \varphi_i^T m\varphi_j = 0 \quad (3-55)$$

如果 $i \neq j$ 时, 有 $\omega_i \neq \omega_j$, 由上式必有

$$\varphi_i^T m\varphi_j = 0, \quad i \neq j \quad (3-56)$$

再由(3-53)式可得

$$\varphi_i^T k\varphi_j = 0, \quad i \neq j \quad (3-57)$$

上面两式表明, 对应于不同振动频率的两个振型, 既关于质量矩阵正交, 又关于刚度矩阵正交, 这就是振型正交的基本条件。

除了以上二个基本的正交条件, 还可证明如下的更一般的正交条件, 即

$$\varphi_i^T m(m^{-1}k)^P \varphi_j = 0, \quad i \neq j \text{ 且 } -\infty < P < \infty$$

式中, P 为整数。易知当 $P=0$ 或 1 时即为式(3-56)与式(3-57)。

3.9.2 规格化

设向量 \hat{x}_i 是由特征方程(3-37)确定的结构振型, 则它除以任何非零的常数 a 也是结构的振型

$$\varphi_i = \frac{1}{a} \hat{x}_i \quad (3-58)$$

这就是说, 振型的幅值是任意的, 只有振动的形状才是唯一的。

按照常数 a 的不同取值, 可以得到不同的规格化。取 a 为振型 \hat{x}_i 中某个特定坐标分量的值, 这相当于把这个坐标分量的幅值取为1, 如像(3-43)式所示的那样, 取 $\hat{x}_{in} = 1$, 并以这个指定值为基准来确定其他位移, 这叫做关于特定坐标分量的振型规格化。这种规格化的结果是在每一个振型向量中, 这个特定坐标分量的值都是1。

如果 a 不是取特定坐标分量的值, 而是取振型 \hat{x}_i 中绝对值最大的分量的值, 那么规格化的结果是在每一个振型向量中最大分量的值都是1。这为后面的计算提供了方便、实用的数据, 有益于提高精度。

还有一种规格化称为关于质量矩阵的正交规格化。这是使用计算机进行结构振动分析时最常用的一种规格化方法。该方法先利用已知振型 \hat{x}_i 计算标量因子

$$\hat{x}_i^T m \hat{x}_i = M_i \quad (3-59)$$

然后取

$$a = \sqrt{M_i}$$

由(3-58)式即可算得规格化后的振型 ϕ_i 。这个振型显然满足

$$\phi_i^T m \phi_i = \frac{1}{M_i} \hat{x}_i^T m \hat{x}_i = 1 \quad (3-60)$$

对于所有的振型都进行了如上的处理, 然后按(3-47)式排列出振型阵 Φ , 利用(3-60)式和正交关系(3-56)式, 这个振型阵显然满足

$$\Phi^T m \Phi = I \quad (3-61)$$

式中 I 为 $n \times n$ 阶单位矩阵。用上述方法进行规格化后的振型叫做对于质量矩阵的正交规格化振型。

例3-7 对于例3-6算得的振型按质量矩阵进行正交规格化。

[解] 为了便于区分, 这里用符号 \hat{x}_i 来表示前例所得的振型。因为质量阵 m 是对角阵, 因此(3-60)式给出的规格化因子是

$$M_i = \sum_{j=1}^3 x_{ij}^2 m_j$$

利用已知结果, 例如第一振型

$$\hat{x}_1 = [0.302 \quad 0.648 \quad 1.000]^T$$

代入(a)式可算得

$$M_1 = 1.813$$

同样可算得

$$M_2 = 2.456, \quad M_3 = 23.29$$

分别用这些因子的平方根去除对应的振型, 就得规格化后的振型矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.2243 & -0.4314 & 0.5139 \\ 0.4814 & -0.3835 & -0.5347 \\ 0.7428 & 0.6381 & 0.2072 \end{bmatrix}$$

最后按(3-61)式进行验算, 有

$$\Phi^T m \Phi = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.004 & -0.002 \\ 0.004 & 1.000 & -0.004 \\ -0.002 & -0.004 & 1.000 \end{bmatrix}$$

上述结果与期望的单位矩阵有微小差别, 这是由舍入误差引起的。

3.10 正则坐标

对于 n 个自由度的体系, 可以从特征方程(3-37)确定 n 个特征值 ω_i^2 和特征向量——振型 $\phi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。假定各特征值互异 $\omega_i^2 \neq \omega_j^2 (i \neq j)$, 由线性代数可知, 不同特征值对应的特征向量是线性无关的, 因此这 n 个振型是线性无关的。又因任意 n 个线性无关的向量都构成 n 维空间的一组基底, 任何一个 n 维向量 x 都可以用这组基底的线性组合来表示, 因此有

$$x = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \dots + \phi_n y_n = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i \quad (3-62)$$

成立,在数学上, y_i 称为组合系数。如果向量 x 是时间 t 的函数 $x = x(t)$, 则组合系数 y_i 也是时间 t 的函数, $y_i = y_i(t)$ 。因此(3-62)式又可写为

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i(t) \quad (3-62a)$$

在结构动力问题中,可对上式各个符号给出确定的物理意义。其中, $x(t)$ 表示结构的位移向量,其分量是以基本单位向量 e_i (这个向量的第 i 个分量为1,其余分量全为零)为基底的组合系数或称为坐标。向量 $x(t)$ 的每个分量给定后,结构位移的几何形状就完全确定,因此又把它称为结构的几何坐标。 ϕ_i 表示结构的第 i 个振型,它与时间 t 无关; $y_i(t)$ 表示第 i 个振型的贡献,它是以振型 ϕ_i 为基底的坐标,因此称为广义坐标或结构的正则坐标。

为了书写简便,略去位移向量 $x(t)$ 和正则坐标 $y_i(t)$ 中的时间变量 t , 以矩阵形式写出(3-62a)式

$$x = \Phi Y \quad (3-63)$$

式中,矩阵 Φ 为结构的振型矩阵,又可以把它看作为一个坐标变换矩阵。显然它的作用是把结构的广义坐标 Y , 变换成结构的几何坐标 x 。因为振型阵 Φ 的各列是线性无关的,因此这个矩阵是满秩可逆的。

引入变换式(3-63)后,将无阻尼体系的运动方程两边前乘 Φ^T , 利用正交条件(3-56)和(3-57)两式,便可得到 n 个关于正则坐标 $y_i(t)$ 的单自由度方程。但一般说来,振动结构的初始条件是以结构的初始位移 $x(0)$ 和速度 $\dot{x}(0)$ 的形式给出的,如何把它们转换成正则坐标 $Y(t)$ 的初始条件呢?当然,原则上可利用振型阵 Φ 的可逆性,由(3-63)式求得。为了避免矩阵求逆,利用正交条件(3-56)式,可求得正则坐标的任意分量 y_i 的初始条件。现进一步说明,将(3-63)式两边前乘 $\phi_i^T m$, 得

$$\phi_i^T m x = \phi_i^T m \Phi Y$$

展开上式的右边

$$\begin{aligned} \phi_i^T m \Phi Y &= \phi_i^T m [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \phi_i^T m (\phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \cdots + \phi_n y_n) = \\ &= \phi_i^T m \phi_1 y_1 + \phi_i^T m \phi_2 y_2 + \cdots + \phi_i^T m \phi_n y_n \end{aligned}$$

利用正交条件(3-56)式,上式最后一个等号后边仅 $\phi_i^T m \phi_i y_i$ 这一项非零,其余各项均为零,因此

$$\phi_i^T m x = \phi_i^T m \phi_i y_i \quad (3-64)$$

从而

$$y_i = \frac{\phi_i^T m x}{\phi_i^T m \phi_i} \quad (3-65)$$

以上表达式适用于每一个正则坐标。

将给定的初始条件 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 代入(3-65)式,便可分别求出正则坐标的初始条件 $y_i(0)$ 和 $\dot{y}_i(0)$ 。

3.11 无阻尼体系非耦合的运动方程

利用正交条件(3-56)和(3-57)两式可以解除多自由度体系各自由度之间的耦合,得到 n 个单自由度体系的运动方程。这为计算多自由度体系的反应带来了极大的方便。

重新写出无阻尼多自由度体系的运动方程

$$m\ddot{x} + kx = p(t)$$

引入(3-63)式,注意到振型矩阵 Φ 不随时间 t 变化,得

$$m\Phi\ddot{Y} + k\Phi Y = p(t) \quad (3-66)$$

将上式等号两边前乘第 i 个振型的转置 φ_i^T , 得

$$\varphi_i^T m\Phi\ddot{Y} + \varphi_i^T k\Phi Y = \varphi_i^T p(t) \quad (3-67)$$

如同推导方程(3-64)的过程一样,展开上式左边的两项。利用正交关系(3-56)和(3-57)两式,可得

$$\varphi_i^T m\varphi_i \ddot{y}_i + \varphi_i^T k\varphi_i y_i = \varphi_i^T p(t) \quad (3-68)$$

定义新的符号

$$M_i = \varphi_i^T m\varphi_i \quad (3-69a)$$

$$K_i = \varphi_i^T k\varphi_i \quad (3-69b)$$

$$P_i(t) = \varphi_i^T p(t) \quad (3-69c)$$

M_i , K_i , $P_i(t)$ 分别称为第 i 个振型对应的广义质量、广义刚度和广义荷载。将以上广义特性代入(3-68)式,则得到第 i 个振型正则坐标的单自由度运动方程

$$M_i \ddot{y}_i + K_i y_i = P_i(t) \quad (3-70)$$

依次令 $i=1, 2, \dots, n$, 就可写出 n 个独立的正则坐标的方程。每一个方程都是不含耦合项的单自由度运动方程,可以用第2章的知识求得任意时刻正则坐标的反应 $y_i(t)$ 。所有正则坐标的反应都求出后,再按(3-63)式把各个正则坐标的反应叠加起来,求出结构在几何坐标中的反应,这种方法叫做振型叠加法。当 n 很大时,并不是所有正则坐标的反应都必须求出,一般说来低频振型分量起的作用较大,随着频率的升高,相应振型分量的作用逐渐减小。如当取前 p 个振型分量算得的位移

$$x = \varphi_1 y_1 + \varphi_2 y_2 + \dots + \varphi_p y_p$$

已达到要求精度时,就不必再计算后面各个高频振型分量的作用了。

在(3-53)式中,令 $j=i$, 可求得第 i 个振型正则坐标的广义刚度和广义质量之间的关系

$$K_i = \omega_i^2 M_i \quad (3-69d)$$

当体系自由度较少时,振型叠加法同样可用于求动力问题的精确解,以下例说明。

例3-8 已知图3-18所示质量弹簧体系的质量为 $m_1 = 2 \times 10^5 \text{ kg}$, $m_2 = 10^5 \text{ kg}$; 弹簧 $k_1 = 4.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$, $k_2 = 2.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$, $k_3 = 2.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$;

设该体系在冲击荷载 $p(t) = [0 \quad 10]^T$ 作用下,其初始条件为 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 。求该体系的位移反应表达式。

【解】 图3-18所示体系为无阻尼体系,其运动方程具

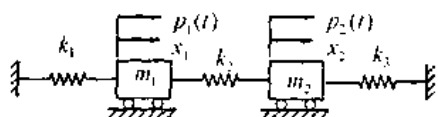


图 3-18 两自由度无阻尼体系

有(3-27)式的形式, 相应的系数矩阵为

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \text{kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-1}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{kN} \cdot \text{cm}^{-1}$$

式中质量单位是由 $10^5 \text{ kg} = 1.0 \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-1}$ 得到的。这样写的目的是为了使质量和刚度的单位具有相同的力的单位和相同的长度单位, 便于计算。

利用频率方程(3-41), 有

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) = 2(\omega^4 - 7\omega^2 + 10) = 2(\omega^2 - 2)(\omega^2 - 5) = 0$$

因此, $\omega_1^2 = 2$, $\omega_2^2 = 5$ 。分别将它们代入方程(3-42), 可求得相应的振型

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

再利用(3-59)式, 可得这两个振型所对应的广义质量是 $M_1 = 3 \times 10^5 \text{ kg}$, $M_2 = 6 \times 10^5 \text{ kg}$ 。关于质量矩阵 \mathbf{m} 规格化后的两个振型为

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \frac{1}{\sqrt{M_1}} \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = \frac{1}{\sqrt{M_2}} \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

利用(3-47)式, 可组合出相应的振型矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 。由上述两个振型和(3-69)式, 可求得与 $\boldsymbol{\Phi}$ 相对应的广义质量

$$M'_1 = M'_2 = 1.0 \times 10^5 \text{ kg}$$

广义刚度

$$K_1 = 2.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}, \quad K_2 = 5.0 \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}$$

广义荷载

$$P_1(t) = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ kN}, \quad P_2(t) = -10\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ kN}$$

这样, (3-70)式表达的非耦合的运动方程就成为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2y_1 &= \frac{10}{\sqrt{3}} \\ \ddot{y}_2 + 5y_2 &= -10\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

将初始条件 $\mathbf{x}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$ 代入(3-65)式, 可得

$$y_i(0) = \dot{y}_i(0) = 0, \quad (i=1,2) \quad (\text{c})$$

由2.8节知, 单自由度体系在矩形脉冲作用下, 运动方程为

$$m\ddot{x} + kx = p_0$$

当初始条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ 时, 其解为

$$x(t) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t) \quad (\text{d})$$

式中 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。由(b)式和(a)式可看出, 每个正则坐标 $y_i(t) (i=1,2)$, 都是单自由度体系在矩形脉冲作用下, 且初始条件为零的振动问题。将具体数值代入(d)式, 两个正则坐标的解为

$$y_1(t) = \frac{5}{\sqrt{3}}(1 - \cos\sqrt{2}t), \quad y_2(t) = -2\sqrt{\frac{2}{3}}(1 - \cos\sqrt{5}t)$$

将正则坐标的解及振型 Φ 代入(3-63)式, 可求得几何坐标的精确解

$$x(t) = \Phi Y(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{3}\cos\sqrt{2}t + \frac{2}{3}\cos\sqrt{5}t \\ 3 - \frac{5}{3}\cos\sqrt{2}t - \frac{4}{3}\cos\sqrt{5}t \end{bmatrix} \quad (e)$$

为了便于同第4章的数值积分结果相比较, 取 $t = n\Delta t$ ($\Delta t = 0.28\text{ s}$, $n = 1, 2, \dots, 12$), 计算每一时刻 t 位移反应的精确解示于表3-1。

表3-1 体系在各时刻的位移反应

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移	0.006	0.045	0.170	0.520	1.05	1.72	2.34	2.86	3.05	2.80	2.13	1.16
x	0.379	1.42	2.79	4.12	5.04	5.33	4.99	4.28	3.46	2.81	2.43	2.49

3.12 阻尼体系非耦合的运动方程

在有阻尼条件下, 体系的运动方程如(3-2)式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

在此情况下, 我们仍然先求无阻尼条件下特征方程(3-37)的解 ω_i^2 和 ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)。因这 n 个特征向量是线性无关的, 它们构成 n 维空间的一组基底, 有阻尼条件下的位移向量 x , 仍然可以像(3-63)式那样, 用这一组基底的线性组合来表示。将(3-63)式代入(3-2)式, 注意到振型矩阵 Φ 与时间 t 无关, 两边前乘 ϕ_i^T 后得

$$\phi_i^T m \Phi \ddot{Y} + \phi_i^T c \Phi \dot{Y} + \phi_i^T k \Phi Y = \phi_i^T p(t) \quad (3-71)$$

如前一小节所述, 利用正交条件(3-56)和(3-57)两式, 即可把(3-71)式左边非阻尼项的耦合解除, 简化为只含一个正则坐标 y_i 的项。如果阻尼矩阵不满足正交条件, 振动分析将变得十分复杂。为了沿用无阻尼体系的分析方法, 工程上常采用近似的处理办法, 假定阻尼矩阵也满足同样的正交条件, 即

$$\phi_i^T c \phi_j = 0, \quad i \neq j \quad (3-72)$$

除了(3-69)式给出的三个广义物理特性外, 再引入第 i 个正则坐标的广义阻尼 C_i , 这四个广义物理特性一并写为

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \phi_i^T m \phi_i \\ K_i &= \phi_i^T k \phi_i = \omega_i^2 M_i \\ C_i &= \phi_i^T c \phi_i = 2\xi_i \omega_i M_i \\ P_i &= \phi_i^T p(t) \end{aligned} \right\} \quad (3-73)$$

式中, 广义阻尼表达式是参照(2-37)式来定义的。当无阻尼体系自由振动的分析完成后, 频率 ω_i 和广义质量 M_i 都是已知的。第 i 个振型的阻尼比 ξ_i 可通过对类似结构的实验来确定。例如对类似结构施加激励, 使它以频率 ω_i 进行振动, 测得的阻尼比即是 ξ_i 。

引入(3-72)和(3-73)两式后, (3-71)式变为关于正则坐标 y_i 的单自由度体系的运动方程

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = P_i(t) \quad (3-74a)$$

或者

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{1}{M_i} P_i(t) \quad (3-74b)$$

这就解除了各自由度之间的耦合，又可以用单自由度体系的有关知识来求解每个正则坐标的动力反应。

为了得到正交条件(3-72)式，工程上常采用的近似处理办法有：

① 忽略阻尼力中的耦合项，即认为

$$\varphi_i^T c \Phi \dot{Y} \approx \varphi_i^T c \varphi_1 \dot{y}_1 + \varphi_i^T c \varphi_2 \dot{y}_2 + \cdots + \varphi_i^T c \varphi_n \dot{y}_n \approx \varphi_i^T c \varphi_i \dot{y}_i = C_i \dot{y}_i \quad (3-75)$$

这种处理办法往往可以得到较好的近似解。

② 将阻尼矩阵 c 假设为比例阻尼，即假设阻尼矩阵为下列形式

$$c = a_0 m + a_1 k \quad (3-76)$$

式中 a_0 , a_1 为常数。这样(3-74a)式中速度项的系数就成为

$$C_i = \varphi_i^T (a_0 m + a_1 k) \varphi_i = a_0 M_i + a_1 K_i \quad (3-77)$$

引入(3-73)式后，可得

$$\xi_i = \frac{a_0 M_i + a_1 K_i}{2\omega_i M_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_i} + a_1 \omega_i \right) \quad (3-78)$$

上式右端括号中的第一项与振动频率 ω_i 成反比，而第二项与 ω_i 成正比，这就是比例阻尼中 $a_0 m$ 与 $a_1 k$ 两项所起的不同作用。

③ 由实验测定各个振型阻尼比，并将(3-69)式代入(3-70)式后，则有

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{1}{M_i} P_i(t)$$

用前述的实验方法直接测定第 i 个振型正则坐标的阻尼比 ξ_i ，然后将阻尼项加到上式左边，就得到(3-74b)式。这种作法比较方便，它避免了首先确定显式的阻尼矩阵 c ，有较大的实用价值，但只适用于阻尼比 $\xi_i \leq 0.2$ 的情况。

3.13 振型叠加法概要

假定结构有 n 个自由度，满足线弹性条件，且用阻尼比 ξ_i 来表示结构阻尼，引入坐标变换(3-63)式，则可以把它的运动方程变为 n 个关于正则坐标 $y_i(t)$ 的非耦合的运动方程，这是振型叠加法的基础。然后分别计算每个振型正则坐标 $y_i(t)$ 的反应，再利用(3-63)式进行叠加，就得到位移在几何坐标中的反应。这是振型叠加法的主要分析过程，它一共分为八步，概述如下：

① 建立运动方程，即

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

② 进行振型和频率分析。

无阻尼自由振动的振动频率和振型由特征方程(3-37)式，即

$$(k - \omega^2 m)\dot{x} = 0$$

确定。结构的 n 个频率和振型都求出后，可建立频率向量 ω 和振型矩阵 Φ 。

③ 计算广义质量、广义荷载和广义阻尼，即

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \varphi_i^T m \varphi_i \\ P_i(t) &= \varphi_i^T p(t) \\ C_i &= \varphi_i^T c \varphi_i = 2\xi_i \omega_i M_i \end{aligned} \right\}$$

④ 写出非耦合的运动方程，即(3-74b)

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) = \frac{1}{M_i} P_i(t)$$

⑤ 计算结构在正则坐标下对荷载的反应。

由(2-105)式，每个正则坐标对荷载的反应可由如下杜哈梅尔积分算出

$$y_i = \frac{1}{M_i \omega_{Di}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{Di} (t-\tau) d\tau \quad (3-79)$$

式中 $\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}$ 为第 i 个振型正则坐标的阻尼振动频率。

⑥ 计算结构在正则坐标下反应的自由振动项部分。

(3-79)式仅适用于初始条件为零的体系。如果初始条件不为零，还必须加上自由振动项，为了计算正则坐标的自由振动项，首先要计算它的初始条件。由(3-65)式，当结构的初始条件给定后，可由以下两式算得第 i 个振型正则坐标的初始条件

$$\left. \begin{aligned} y_i(0) &= \frac{1}{M_i} \varphi_i^T m x(0) \\ \dot{y}_i(0) &= \frac{1}{M_i} \varphi_i^T m \dot{x}(0) \end{aligned} \right\} \quad (3-80)$$

然后由(2-42)式，在有阻尼条件下，正则坐标反应的自由振动项为

$$y_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[\frac{\dot{y}_i(0) + \xi_i \omega_i y_i(0)}{\omega_{Di}} \sin \omega_{Di} t + y_i(0) \cos \omega_{Di} t \right] \quad (3-81)$$

⑦ 计算结构在几何坐标下的位移反应。

将(3-81)式和(3-79)式的结果相加，得时刻 t 正则坐标总的反应 y_i 。算出每个正则坐标的反应后，由式(3-63)，即

$$x(t) = \Phi Y(t)$$

可算出在几何坐标下的位移反应。按振型分量形式可写出以下式子

$$x(t) = \varphi_1 y_1(t) + \varphi_2 y_2(t) + \cdots \quad (3-82)$$

这就是说，总的位移反应等于各个振型对反应的贡献相叠加，因此这种方法叫做振型叠加法。应当说明，低频振型的贡献大，高频振型的贡献明显地逐渐减小，而且高频振型的可靠性也较差。由于这两个原因，在计算系统的位移反应时，只需要取若干个低频项，当算得的反应达到要求精度时，便可舍去其余的高频项，而不需要计算所有振型项。

⑧ 计算弹性力的反应。

结构设计是以构件的内力为依据，求出位移反应的时程函数 $x(t)$ 后，还必须计算结构的内力，最主要的是结构抵抗弹性变形的弹性力

$$f_s(t) = kx(t) = k\Phi Y(t) \quad (3-83)$$

按振型向量的形式可把上式写为

$$f_s(t) = k\phi_1 y_1(t) + k\phi_2 y_2(t) + \dots$$

将(3-51)式代入上式, 得

$$f_s(t) = \omega_1^2 m\phi_1 y_1(t) + \omega_2^2 m\phi_2 y_2(t) + \dots \quad (3-84)$$

将(3-84)式与(3-82)式进行比较, 在计算弹性力的动力反应时, 每一振型项都要乘以相应频率的平方, 说明高频振型仍然起着较大的作用。因此, 为了达到同样的精度, 计算弹性力所包含的振型向量数要比计算位移所包含的振型向量数多些。

(3-84)式可简写为如下矩阵形式:

$$f_s(t) = m\Phi\{\omega_i^2 y_i(t)\} \quad (3-85)$$

式中, $\{\omega_i^2 y_i(t)\}$ 表示一向量, 该向量的分量为每一个振型的正则坐标与相应频率平方的乘积。

在计算各构件内力时, 常可在局部坐标下作局部分析。

例3-9 以图3-16所示三层框架结构为例来说明用振型叠加法分析结构自由振动位移反应的步骤。

[解] 在例3-6中已给出振型叠加法前两步的结果, 这里先列出结构物理特性矩阵和振动特性矩阵

$$m = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}, \quad k = 600 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{bmatrix} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0.302 & -0.676 & 2.48 \\ 0.648 & -0.601 & -2.58 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

第三步要求计算广义质量和广义荷载。对于自由振动, 施加荷载 $p(t)$ 为零, 广义荷载也为零, 因此只需计算广义质量。例3-7已给出了计算结果, 把它们写为矩阵的形式

$$M = \Phi^T m \Phi = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.812 & 0 & 0 \\ 0 & 2.456 & 0 \\ 0 & 0 & 23.29 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-1}$$

这个矩阵称为广义质量矩阵。

对于无阻尼体系的自由振动, 第四步和第五步都不必进行, 现在考虑第六步, 计算正则坐标的自由振动, 假定结构的初始条件为

$$x(0) = [0.3 \quad 0.4 \quad 0.5]^T \text{ cm}, \quad \dot{x}(0) = [0 \quad 9 \quad 0]^T \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

先讨论正则坐标的初始位移 $Y(0)$ 。为了减少计算工作量, 由(3-80)式, 可先计算矩阵乘积

$$mx(0) = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

将上式代入(3-80)式的第一个表达式, 有

$$y_i(0) = \frac{1}{M_i} \phi_i^T m x(0) = \frac{1}{M_i} \phi_i^T \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

将已知数据代入, 可求得

$$Y(0) = [0.591 \quad -0.108 \quad 1.89 \times 10^{-2}]^T \text{ cm}$$

类似地, 利用(3-80)式的第二个表达式和已知数据, 可得正则坐标的初始速度

$$\dot{Y}(0) = [4.82 \quad -3.30 \quad -1.50]^T \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

注意到在(3-80)式中, 质量矩阵 m 和广义质量 M_i 具有相同的量纲, 振型 ϕ_i^T 无量纲, 因此正则坐标的初始位移和速度的单位应与结构几何坐标的相应物理量一致。

在无阻尼条件下, (3-81)式成为

$$y_i(t) = \frac{\dot{y}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t + y_i(0) \cos \omega_i t$$

将上面求得的正则坐标的初始条件和振动频率代入这个表达式, 就得到各正则坐标的自由振动反应

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.333 \sin \omega_1 t \\ -0.106 \sin \omega_2 t \\ -3.25 \times 10^{-2} \sin \omega_3 t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.591 \cos \omega_1 t \\ -0.108 \cos \omega_2 t \\ 1.90 \times 10^{-2} \cos \omega_3 t \end{bmatrix}$$

其单位为 cm。若将此结果代入叠加关系(3-63)

式, 可求得各层的自由振动运动。显然每一层的运动都包含各个振动频率的贡献。利用(3-85)式又可以求得各个自由度方向的弹性力, 进一步确定各层立柱的剪力。

例3-10 假定图3-19所示框架的物理特性与图3-16的相同, 计算它在冲击荷载

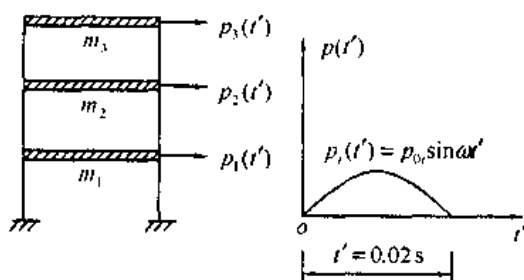


图 3-19 承受冲击荷载的框架

$$p(t') = \begin{bmatrix} p_1(t') \\ p_2(t') \\ p_3(t') \end{bmatrix} = \sin \bar{\omega} t' \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ kN}, \quad \begin{cases} t_1 = 0.02 \text{ s} \\ 0 \leq t' \leq t_1 \end{cases}$$

作用下的动力反应。(这里用 t' 来表示荷载作用的时间, 以免同新设的位移反应时间混淆)。

解 由2.8节, 单自由度体系在正弦半波脉冲作用下, 自由振动阶段的位移反应为

$$x(\bar{t}) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \alpha \bar{t} + x(t_1) \cos \alpha \bar{t}, \quad \bar{t} = t' - t_1 \geq 0$$

仿照(2-30)式的做法, 可把这个表达式写为一个三角函数的形式

$$x(\bar{t}) = \rho \sin(\alpha \bar{t} + \theta) \quad (\text{a})$$

式中 ρ 表示最大位移, 由(2-74)式它又可以表示为

$$\rho = D \frac{p_0}{k}$$

式中 D 为动力放大系数, 可根据脉冲作用时间 t_1 与体系固有周期 T 的比值, 从图2-22查得。重新定义时间坐标的原点, (a)式的位移反应可表示为

$$x(t) = D \frac{P_0}{k} \sin \omega t$$

对正则坐标 y_i 进行如上处理, 则可把它表示为

$$y_i(t) = D_i \frac{P_{0i}}{K_i} \sin \omega_i t \quad (\text{b})$$

式中

$$K_i = \omega_i^2 M_i, \quad P_{0i} = \phi_i^T [10 \quad 10 \quad 5]^T \text{ kN}$$

利用前面给出的数据可算得

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.81 \\ 23.8 \\ 495 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{cm}^{-1}, \quad \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ P_{03} \end{bmatrix} = \Phi^T \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.5 \\ -7.77 \\ 4.00 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

以及各个正则坐标对应的脉冲长度与周期之比

$$\begin{bmatrix} \frac{t_1}{T_1} \\ \frac{t_2}{T_2} \\ \frac{t_3}{T_3} \end{bmatrix} = \frac{0.02}{2\pi} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.046 \\ 0.099 \\ 0.147 \end{bmatrix}$$

利用这些比值, 从图2-22可查得各振动型动力放大系数

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.39 \\ 0.57 \end{bmatrix}$$

将这些数据代入(b)式, 得到

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.685 \sin 14.5t \\ -0.128 \sin 31.1t \\ 4.60 \times 10^{-3} \sin 46.1t \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$

因为每一个振型的最后一个分量都是1.0, 所以顶层的位移 $x_3(t)$ 仅是(c)式各个正则坐标表达式的总和。然而对于其他各层, 例如第二层, 就必须把各个正则坐标与相应振型分量相乘, 进行叠加。因此

$$x_2(t) = \sum \phi_{2i} y_i(t) = 0.444 \sin 14.5t + 0.077 \sin 31.1t - 0.012 \sin 46.1t \quad (\text{d})$$

同样, 在脉冲作用下结构中产生的弹性力由(3-85)式给出。对于这个集中质量体系, 第二层的弹性力为

$$f_{s_2} = \sum m_2 \phi_{2i} \omega_i^2 y_i(t) \approx 1.40 \sin 14.5t + 1.12 \sin 31.1t - 0.383 \sin 46.1t \quad (\text{e})$$

比较式(e)和(d), 很明显高阶振型对于弹性力反应所引起的作用要比对于位移反应的作用大得多。

习 题

3-1 建立图T3-1所示弹簧质量体系的运动方程。

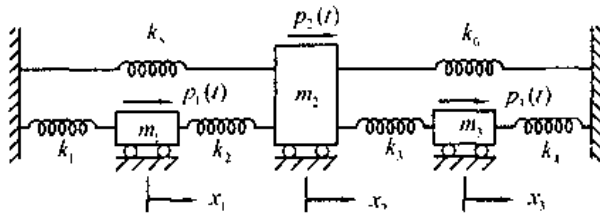


图 T3-1

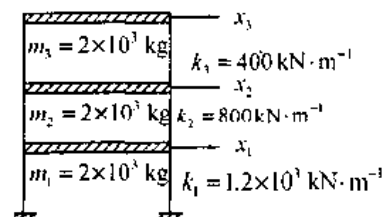


图 T3-2

3-2 图T3-2示出了三层剪切型建筑物的理想化模型，其所有质量都集中在刚性横梁和地基上，利用图中给定质量和刚度特性，写出该结构的质量矩阵和刚度矩阵。

3-3 已知平面均匀梁单元的弹性模量为 E ，抗弯刚度为 EI ，横截面积为 A ，单位长度上的质量为 \bar{m} ，所取自由度如图T3-3所示，计算单元的刚度矩阵和一致质量矩阵(可利用例3-2及例3-3的结果)。

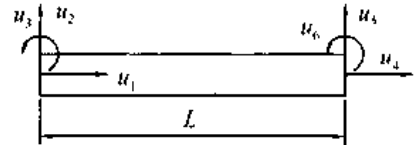


图 T3-3

3-4 采用埃尔米特多项式[(3-28)式]作为形状函数，用(3-31)式计算抗弯刚度为 $EI(x) = EI_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)$ 的梁单元的刚度系数 k_{23} 。

3-5 利用(3-32)式计算分布质量 $m(x) = \bar{m} \left(1 + \frac{x}{L}\right)$ 的梁单元的一致质量矩阵系数 m_{23} 。假定采用(3-28)式的形状函数，将梁等分为四段，用辛普森法计算积分。

3-6 图T3-6所示平面框架由等截面杆组成，各杆特性如图示。利用单元刚度矩阵(3-29)式，集合指定三个自由度对应的结构刚度矩阵。

3-7 利用(3-30)式给出的单元质量矩阵，集合习题3-6结构的质量矩阵。

3-8 利用(3-20)式计算图T3-6所示各单元的等效节点荷载，然后集合出指定三个自由度所对应的荷载向量。

3-9 与图T3-2所示结构外形相同但构件长度和物理特性不同的平面框架，其刚度矩阵和集中质量矩阵如下

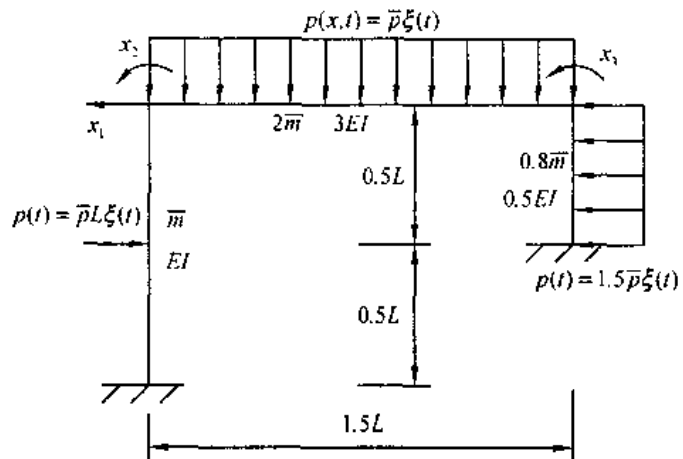


图 T3-6

$$k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 20 & -10L & -5L \\ -10L & 15L^2 & 8L^2 \\ -5L & 8L^2 & 12L^2 \end{bmatrix}, \quad m = \bar{m}L \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ① 用静力凝聚计算凝聚掉两个转动自由度后的刚度矩阵；
- ② 写出凝聚后无阻尼单自由度体系的特征方程。

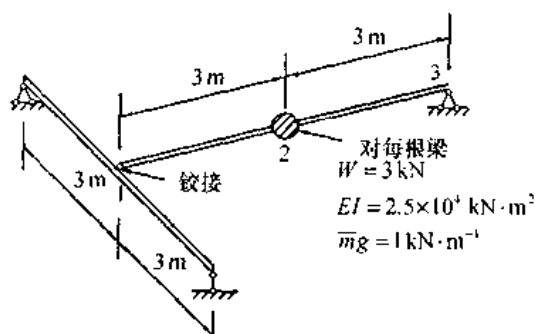


图 T3-12

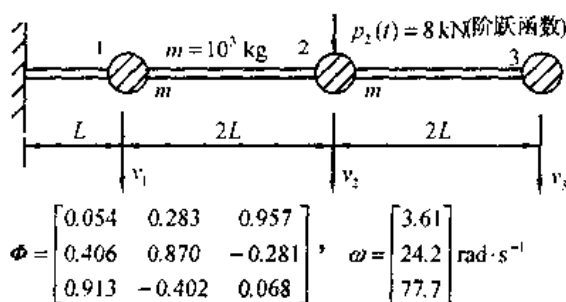


图 T3-13

3-10 一座三层剪切型建筑物，其特性如图T3-2所示。

- ① 解行列式方程，求无阻尼结构的振动频率；
- ② 取顶层振幅为1，计算三个振型；
- ③ 验算所得振型满足(3-56)式给出的正交条件；
- ④ 将所得振型进行正交规格化，并用式(3-59)来验算规格化后的振型。

3-11 如果图T3-2的建筑物改为， $m_1 = 3 \times 10^3 \text{ kg}$ ， $m_2 = 2 \times 10^3 \text{ kg}$ ， $m_3 = 2 \times 10^3 \text{ kg}$ ， $k_1 = k_2 = k_3 = 800 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ ，重算习题3-10的几个问题。

3-12 两根相同的等截面梁支承着一个重量为3 kN的设备，其布置如图T3-12的透视图所示。图中给出了梁的抗弯刚度和每米长的重量。将结构简化为图示两个自由度的体系。

假定每根梁分布质量的 $\frac{1}{2}$ 集中于它的中点， $\frac{1}{4}$ 集中于端点，计算结构的两个频率和振型。

提示：中点作用集中荷载 p 的等截面简支梁中点的挠度是 $\frac{pL^3}{48EI}$ 。用(3-49)式求解。

3-13 图T3-13所示悬臂梁支承三个相等的集中质量，已算得结构的无阻尼振动频率和振型矩阵。在质量2上施加一个8 kN的阶跃荷载(即在 $t=0$ 时刻突然施加8 kN的力并永久保留在结构上)，写出质量3的位移反应表达式。画出在时段 $0 < t < T_1$ 内反应 $x_3(t)$ 的时程曲线。

3-14 在图T3-13所示结构中，假定在质量2上施加荷载改为 $p_2(t) = 3 \sin \bar{\omega} t \text{ kN}$ ，其中 $\bar{\omega} = 0.75 \omega_1$ 。

- ① 假定无阻尼，写出质量1的稳态反应表达式；
- ② 求在最大反应时刻所有质量的位移值，并画出该时刻的挠曲形状。

3-15 假定结构各振型的阻尼比为10%，重算习题3-14的①。

3-16 在图T3-16中给出了一座三层剪切型建筑物的物理特性，假定已算得

$$\Phi^T = \begin{bmatrix} 0.198 & -0.872 & 12.1 \\ 0.548 & -1.52 & -6.26 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} 11.6 \\ 27.5 \\ 45.9 \end{bmatrix} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

设楼面的初位移 $x_1 = 0.3 \text{ cm}$ ， $x_2 = -0.8 \text{ cm}$ ， $x_3 = 0.3 \text{ cm}$ ，然后在 $t=0$ 时刻突然释放形成自由振动。确定 $t = \frac{2\pi}{\omega}$ 时刻的位移形状。

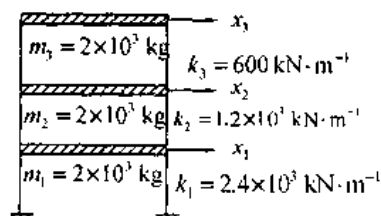


图 T3-16

- ① 假定无阻尼；
- ② 假定每一振型的阻尼比都是10%。

第4章 离散结构动力学方程的逐次积分法

上一章我们对多自由度体系振动作了讨论,主要讨论了如何建立集中质量离散体系的运动方程,重点讨论了如何用有限元法将分布参数体系简化为离散体系,并建立其运动方程;在此基础上,我们对多自由度体系的自振特性计算及体系在动力荷载作用下的瞬态反应计算作了介绍;最后就振型叠加法这一很有用的方法进行了较深入的讨论。

本章对多自由度体系振动将作更深入的讨论,首先将介绍离散结构动力学方程的逐次积分的数值方法。这种方法在工程上极为有用,因为它既可以对承受任何动力荷载的多自由度的线性体系(包括阻尼耦合体系)加以求解,还可以对非线性结构(此时已不能采用叠加原理)承受复杂荷载情况进行求解。

4.1 增量的平衡方程

4.1.1 逐次积分法的引入

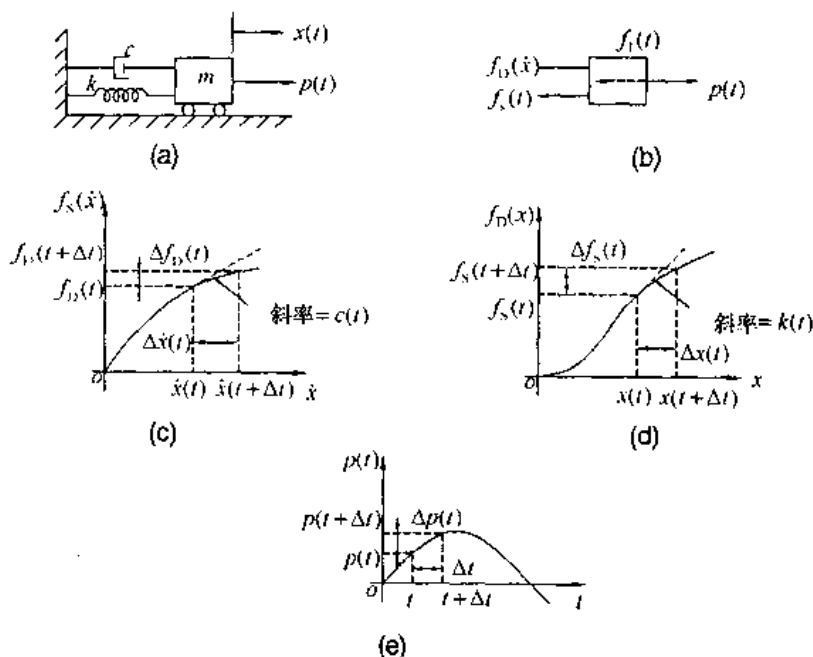
前面讨论的多自由度体系振动都是假定体系为线性的,因此可以先计算结构的振型和频率,然后采用振型叠加原理计算结构的反应。这样带来的好处是无论体系有多少自由度,常常只需考虑前几个振型就能对动力反应进行恰当的估计,因此可减少很多计算工作量。然而,在许多情况下,结构的物理特性并不能始终保持不变。刚度系数可以随材料的屈服或结构构件中轴向力的明显改变(它将引起几何刚度系数的改变)而变化。在动力反应过程中,质量系数或阻尼系数也许会发生变化。任何这样的改变都将改变体系的振动特性,实际上简单的自由振动的概念不再适用于这样的非线性体系,因此无法再用正则坐标对运动方程解耦。

分析任意的非线性体系唯一普遍适用的方法,是对耦联的运动方程进行数值积分。这种积分(通常称为直接积分或逐次积分)是在一系列短时间增量 Δt 中计算反应,而通常为了计算方便起见,取 Δt 为等步长,在每个时间间隔的起点和终点建立动力平衡条件。对每一时段按照线性体系计算结构的反应,这个线性体系的特性取自时段开始时刻所限定的体系特性,而时段结束时的特性要根据那时体系的变形和应力状态来修正。这样,非线性分析就近似为一系列依次变化的线性体系的分析。

以下将介绍的逐次积分法也适用于线性结构。有时用直接积分法比用振型叠加法更胜一筹,这是因为在自由度很多的体系中计算振型和频率的工作量非常大,而直接积分法不要求振型和频率。一般认为,在计算受短时间脉冲荷载作用的大型复杂结构的反应时,逐次积分法更显示其优越性,因为这种荷载可能会激起许多个振型而只需要计算一段很短的反应时程。

4.1.2 增量平衡方程

在本节讨论中, 我们首先考虑图4-1(a)所示的单自由度体系, 体系的特性 m , k , c 和 $p(t)$ 可以理解为2.4节中所讨论的广义量, 而并不只局限于图上所示的简单情况。作用于体系质量 m 上的力如图4-1(b)所示, 弹簧力和阻尼力的一般非线性性质分别绘于图4-1(c)和(d)中, 任意作用荷载则绘于图4-1(e)中。



(a) 单自由度结构 (b) 力的平衡 (c) 非线性阻尼 (d) 非线性刚度 (e) 作用荷载

图 4-1 非线性动力体系的定义

在任意瞬间 t , 作用于质量 m 上的力系的平衡要求为

$$f_1(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (4-1a)$$

而在很短的时间 Δt 以后, 方程将为

$$f_1(t + \Delta t) + f_D(t + \Delta t) + f_S(t + \Delta t) = p(t + \Delta t) \quad (4-1b)$$

由方程(4-1b)减去方程(4-1a)则可得时间间隔 Δt 的运动方程的增量形式

$$\Delta f_1(t) + \Delta f_D(t) + \Delta f_S(t) = \Delta p(t) \quad (4-2)$$

这个方程中的增量力可表示如下

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_1(t) &= f_1(t + \Delta t) - f_1(t) = m\Delta\ddot{x} \\ \Delta f_D(t) &= f_D(t + \Delta t) - f_D(t) = c(t)\Delta\dot{x} \\ \Delta f_S(t) &= f_S(t + \Delta t) - f_S(t) = k(t)\Delta x \\ \Delta p(t) &= p(t + \Delta t) - p(t) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

其中, 质量 m 通常被假设为常量, 而 $c(t)$ 和 $k(t)$ 项则表示在时间间隔 Δt 内速度和位移相应的阻尼和刚度特性, 它们分别如图4-1(c)和(d)中 Δt 内相应曲线的割线所示。但是由于这些特性依赖于时间增量 Δt 末端的速度和位移, 故所示割线斜率只能用迭代法逐次逼近。

因此,通常可用时间间隔起点所定义的切线斜率来代替

$$c(t) = \left(\frac{df_D}{d\dot{x}} \right)_t, \quad k(t) = \left(\frac{df_S}{dx} \right)_t \quad (4-4)$$

将方程(4-3)代入方程(4-2),可得时间 t 的增量平衡方程的最终形式为

$$m\Delta\ddot{x} + c(t)\Delta\dot{x} + k(t)\Delta x = \Delta p(t) \quad (4-5)$$

在这种类型的分析中,所讨论的材料特性可包括任何的非线性形式。因此,没有必要规定弹簧力 f_s 像非线性弹性材料那样仅仅依赖于位移。这同样也可以很好地说明非线性滞变材料。在这种材料中,力依赖于变形的过去时程以及位移的当前值,唯一的要求是刚度特性必须完全由变形的过去和目前状态所确定。此外,隐含的质量不变的假定显然是可以改动的,质量也可以表示为时间变化的量。

对多自由度体系,在时间增量 Δt 时段内的力增量平衡方程可仿照单自由度体系增量方程推导过程写出矩阵形式的方程。因此取 t 和 $t + \Delta t$ 时刻所确定的平衡关系式之间的差就得到增量平衡方程

$$\Delta f_1(t) + \Delta f_D(t) + \Delta f_S(t) = \Delta p(t) \quad (4-6)$$

类似于单自由度体系的表达式(4-3)式,这个方程中力的增量可表达为

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_1(t) &= f_1(t + \Delta t) - f_1(t) = m\Delta\ddot{x} \\ \Delta f_D(t) &= f_D(t + \Delta t) - f_D(t) = c(t)\Delta\dot{x} \\ \Delta f_S(t) &= f_S(t + \Delta t) - f_S(t) = k(t)\Delta x \\ \Delta p(t) &= p(t + \Delta t) - p(t) \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

这里假定质量矩阵 m 是不随时间变化的。

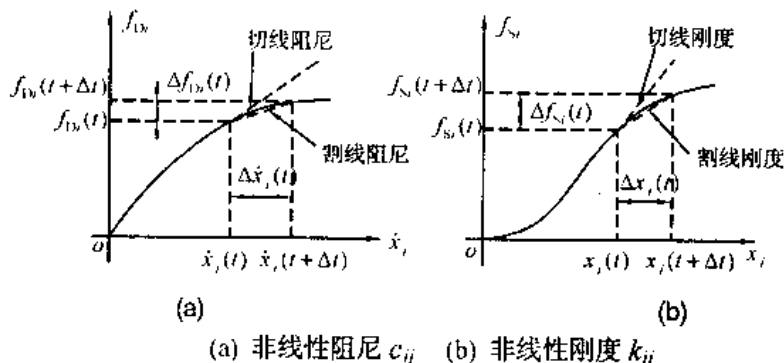


图 4-2 多自由度体系中非线性影响系数的定义

增量方程中的阻尼矩阵 $c(t)$ 和刚度矩阵 $k(t)$ 中的元素是由时间增量过程确定的影响系数 $c_{ij}(t)$ 和 $k_{ij}(t)$,在图4-2中给出了这些系数的典型表示。像解释单自由度体系一样,为了在求解的每一步中避免迭代,不用割线而用起点的切线斜率来度量阻尼或刚度特性,由此给出的影响系数为

$$c_{ij}(t) = \left(\frac{df_{D_i}}{d\dot{x}_j} \right)_t, \quad k_{ij}(t) = \left(\frac{df_{S_i}}{dx_j} \right)_t \quad (4-8)$$

将(4-7)式代入(4-6)式,可得以下形式的增量运动方程

$$m\Delta\ddot{x} + c(t)\Delta\dot{x} + k(t)\Delta x = \Delta p(t) \quad (4-9)$$

因为 $c(t)$ 和 $k(t)$ 的各元素均采用了起点的切线斜率值, 所以(4-9)式左边的力增量表达式只是近似的。

4.2 中心差分法

为了求解形式如(4-9)式那样的增量矩阵运动方程, 通常可采用数值积分方法。数值积分方法可分为逐次积分法和逐次微分法。其中逐次积分法求解动力反应又可分为有限差分法和直接积分法。有限差分法的特点是用位移近似地表似加速度和速度, 从而将动力方程在时间域上离散, 并化为对时间的差分格式, 而在空间域内仍采用空间有限元离散。在理论上有大量的有限差分格式可采用, 而实际上仅有少数几个差分格式对求解动力方程才是有效的。在这种问题的求解中, 一种很有效的方法就是中心差分法。

4.2.1 中心差分法的基本公式

假定在 $t=0$ 时的位移 x_0 、速度 \dot{x}_0 、加速度 \ddot{x}_0 均为已知, 再将求解的时间区间划分为 n 个等份, 即 $\Delta t = \frac{t}{n}$ 。我们要建立的积分格式就是从已知的 $t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 的解来计算下一时间步的解。

在中心差分法中, 是按中心差分法将速度和加速度矢量离散为

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2\Delta t} (x_{i+\Delta t} - x_{i-\Delta t}) \quad (4-10)$$

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{\Delta t^2} (x_{i+\Delta t} - 2x_i + x_{i-\Delta t}) \quad (4-11)$$

考虑在 t 时刻的动力方程, 有

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = p(t) \quad (4-12)$$

将(4-10)和(4-11)式代入(4-12)式中, 得到

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right) x_{i+\Delta t} = p_i - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2} \right) x_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t} \right) x_{i-\Delta t} \quad (4-13)$$

这样, (4-12)式就可化为相邻时刻的位移表示的代数方程, 由此可解出 $x_{i+\Delta t}$ 。又由于它是利用 t 时刻的平衡条件解得 $x_{i+\Delta t}$, 所以这种积分又称为显式积分方法。我们注意到, 在求解 $x_{i+\Delta t}$ 时, 需要用到 x_i 和 $x_{i-\Delta t}$ 。于是, 在计算开始时, 即 $t=0$ 时, 要计算 $x_{-\Delta t}$ 的值, 而它是未知的, 因此, 必须有一个起动的处理。显然, 这种算法不是自行起步的。由于 x_0 , \dot{x}_0 和 \ddot{x}_0 均为已知, 所以利用(4-10)和(4-11)式, 并令 $t=0$ 可解得

$$x_{-\Delta t} = x_0 - \dot{x}_0 \Delta t + 0.5 \ddot{x}_0 \Delta t^2 \quad (4-14)$$

4.2.2 中心差分法的计算步骤

1) 初始计算

- ① 形成刚度矩阵 k , 质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c ;
- ② 给定初始条件 x_0 , \dot{x}_0 , \ddot{x}_0 ;

- ③ 选择时间步长 Δt ，且 $\Delta t < \Delta t_{cr}$ (临界最大值，见下讨论)，并计算积分常数

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t}, \quad a_2 = 2a_0, \quad a_3 = \frac{1}{a_2}$$

- ④ 计算 $x_{-\Delta t} = x_0 - \Delta t \dot{x}_0 + a_3 \ddot{x}_0$;
 ⑤ 形成有效质量矩阵 \tilde{m} ， $\tilde{m} = a_0 m + a_1 c$;
 ⑥ 对 \tilde{m} 作三角分解， $\tilde{m} = LDL^T$ 。

2) 对每一个时间步进行计算

- ① 计算时刻 t 的有效荷载

$$\tilde{p}_t = p_t - (k - a_2 m)x_t - (a_0 m - a_1 c)x_{t-\Delta t}$$

- ② 求解 $t + \Delta t$ 时刻的位移

$$LDL^T x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_t \quad (4-15)$$

- ③ 如果需要，求出 t 时刻的加速度和速度

$$\ddot{x}_t = a_0 (x_{t-\Delta t} - 2x_t + x_{t+\Delta t}) \quad (4-15a)$$

$$\dot{x}_t = a_1 (-x_{t-\Delta t} + x_{t+\Delta t})$$

应当指出，在中心差分算法中，(4-15)式左端的系数矩阵只与质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c 有关，而与刚度矩阵 k 无关。如果质量矩阵和阻尼矩阵是对角阵，那么在解方程时，就不需要对系数矩阵进行三角分解，即不需要解线性代数方程组，而从第一步开始逐步直接求解各个时刻 $x_{t+\Delta t}$ 的值。这时中心差分格式就是一种显式的格式。此外，由于不求解代数方程组，也就不需要进行组集；它的右端的形成也只需在单元一级水平上，由每个单元对有效荷载矢量的贡献叠加而成。因此，在某些结构通用程序(如ADINA)中规定，在使用中心差分法时，必须使用对角的质量矩阵和阻尼矩阵。

4.2.3 中心差分法的特点

使用中心差分法的优点在于，当 m 和 c 为对角阵的情况时可不必计算出全部单元的组刚度和质量矩阵，只是在单元量级上求解动力方程，它只需要较小的高速存储器。如果相邻单元的刚度和质量矩阵相同，只需要从备用的存储器中计算或读取相应的一系列矩阵中的第一个矩阵，这种方法就变得更加有效。

中心差分法的不足在于，它的有效程度取决于所使用的对角质量矩阵和所选择的通常与速度有关的阻尼力。如果仅仅包含对角的阻尼质量矩阵，在单元量级上进行求解的好处是很明显的。在实际运用中，采用的对角质量矩阵通常是不精确的，因此解的精度由充分地进行有限单元离散化来保证。在中心差分使用原理中，应考虑的重要的一点是它的时间步长 Δt 应小于临界值 Δt_{cr} 。 Δt_{cr} 可由所有单元组合的质量和刚度性质计算得到

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (4-16)$$

在上式中， T_n 是有限单元的组最小周期， n 是单元系统的阶数。周期 T_n 可用求解特征值问题的任一方法求得。中心差分法是条件稳定的。如果使用的时间步长大于 Δt_{cr} ，积分将不稳定，就是说在这时由于数值积分的误差或计算机上的舍入误差的增长，使得绝大

多数情况下计算变得无意义。

4.2.4 例题

例4-1 图3-18所示体系的运动方程为

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (a)$$

通过求解这个体系自由振动的特征值的问题, 已求得自由振动的周期 $T_1 = 4.45$, $T_2 = 2.80$ 。使用中心差分方法计算, 分别以其时间步长① $\Delta t = \frac{1}{10}T_2$, ② $\Delta t = 10T_2$, 并假定 $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, 试计算这个系统在前12个时间步长的反应。

【解】 第一步, 用方程(a)计算零时刻的 \ddot{x}_0 , 即令

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{x}_0 + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

因此

$$\ddot{x}_0 = [0 \quad 10]^T$$

考虑情况①, 即 $\Delta t = 0.28$, 可以计算出系数

$$a_0 = \frac{1}{(0.28)^2} = 12.76, \quad a_1 = \frac{0.5}{0.28} = 1.79,$$

$$a_2 = 2a_0 = 25.5, \quad a_3 = \frac{1}{a_2} = 0.0392$$

因此,

$$x_{-N} = 0 - 0.28 \times 0 + 0.0392 [0 \quad 10]^T = [0 \quad 0.392]^T$$

$$\bar{m} = 12.8 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1.79 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.5 & 0 \\ 0 & 12.8 \end{bmatrix}$$

在 t 时刻的有效荷载是

$$\tilde{p}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 45.0 & 2 \\ 2 & 21.5 \end{bmatrix} x_t - \begin{bmatrix} 25.5 & 0 \\ 0 & 12.8 \end{bmatrix} x_{t-N}$$

因此, 可得求解每一个时间步长的方程:

$$\begin{bmatrix} 25.5 & 0 \\ 0 & 12.8 \end{bmatrix} x_{t+N} = \tilde{p}_t \quad (b)$$

对于每一个步长, 计算(b)的解, 结果见表4-1。

表 4-1 中心差分法的计算结果 ($\Delta t = 0.28$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	0.000	0.031	0.166	0.483	1.02	1.68	2.36	2.85	2.98	2.66	1.91	0.907
x	0.389	1.44	2.81	4.09	4.92	5.11	4.71	3.95	3.15	2.59	2.40	2.52

对于情况②, 即 $\Delta t = 28$, 用同样方法可求得

$$x_{\Delta t} = [0 \quad 3.89 \times 10^3]^T, \quad x_{2\Delta t} = [3.05 \times 10^6 \quad -1.2 \times 10^7]^T$$

以上计算的位移是连续的。由于时间步长 Δt 大约是 T_1 的6倍和 T_2 的10倍, 在数值计算中远

不能达到精度的要求。特别应注意的是所计算的结果是增加还是减少，它关系到积分是否是稳定的。在这个例子中，计算结果是增加的，这说明对时间的积分是不稳定的。正如前面已指出，对于稳定性来说，在积分中使用中心差分法时，时间步长 Δt 不能大于 Δt_{cr} ，此处 $\Delta t_{cr} = \frac{T_2}{\pi}$ 。上述情况②的时间步长远大于 Δt_{cr} ，因此所计算的反应的增量是无界的。这是一种特定的失稳现象。后面还可以看到，使用无条件稳定的豪鲍尔特法、威尔逊- θ 法和纽马克等各种方法，在 $\Delta t = 28$ 时所产生的反应也很不精确，但不是增加的。

4.3 豪鲍尔特(Houbolt)法

4.3.1 豪鲍尔特法的基本公式

豪鲍尔特法也是一种差分法，只是这种差分格式是利用 $t + \Delta t$ ， t ， $t - \Delta t$ 和 $t - 2\Delta t$ 四个时刻上位移的三次插值多项式建立起来的，即假定

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2x_{t+\Delta t} - 5x_t + 4x_{t-\Delta t} - x_{t-2\Delta t}) \quad (4-17)$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11x_{t+\Delta t} - 18x_t + 9x_{t-\Delta t} - 2x_{t-2\Delta t}) \quad (4-18)$$

且认为 $x_{t-\Delta t}$ ， $x_{t-2\Delta t}$ 和 x_t 均为已知，而 $x_{t+\Delta t}$ 为未知的，则 $t + \Delta t$ 时刻的动力方程为

$$m\ddot{x}_{t+\Delta t} + c\dot{x}_{t+\Delta t} + kx_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t} \quad (4-19)$$

将(4-17)式和(4-18)式代入(4-19)式中，并进行整理，就得到求解 $x_{t+\Delta t}$ 时刻的方程

$$\left(\frac{2}{\Delta t^2} m + \frac{11}{6\Delta t} c + k \right) x_{t+\Delta t} = \left(\frac{5}{\Delta t^2} m + \frac{3}{\Delta t} c \right) x_t - \left(\frac{4}{\Delta t^2} m + \frac{3}{2\Delta t} c \right) x_{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{\Delta t^2} m + \frac{1}{3\Delta t} c \right) x_{t-2\Delta t} + p_{t+\Delta t} \quad (4-20)$$

在(4-20)式中，为求得 $x_{t+\Delta t}$ 的解，需要事先知 x_t ， $x_{t-\Delta t}$ 和 $x_{t-2\Delta t}$ ，因此，尚需利用类似于中心差分法中的起动处理方法。在求得 $x_{\Delta t}$ ， $\dot{x}_{\Delta t}$ 和 $\ddot{x}_{\Delta t}$ 后，可利用(4-17)式和(4-18)式并令 $t=0$ ，可得

$$\ddot{x}_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2x_{\Delta t} - 5x_0 + 4x_{-\Delta t} - x_{-2\Delta t})$$

$$\dot{x}_{\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11x_{\Delta t} - 18x_0 + 9x_{-\Delta t} - 2x_{-2\Delta t})$$

由此可求得 $x_{-\Delta t}$ 和 $x_{-2\Delta t}$ 。这样，利用 $x_{-\Delta t}$ ， x_0 和 $x_{\Delta t}$ 就可由 Δt 开始用(4-20)式求 $x_{2\Delta t}$ ，再代入(4-17)和(4-18)式，即可求得 $\dot{x}_{2\Delta t}$ 和 $\ddot{x}_{2\Delta t}$ 。如此逐步求下去即可求得任意时刻的动力响应。

4.3.2 豪鲍尔特法的计算步骤

1) 初始计算

① 形成刚度矩阵 k ，质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c ；

- ② 给定初始条件 x_0 , \dot{x}_0 和 \ddot{x}_0 ;
 ③ 选择时间步长 Δt , 并计算积分常数

$$a_0 = \frac{2}{\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{11}{6\Delta t}, \quad a_2 = \frac{5}{\Delta t^2}, \quad a_3 = \frac{3}{\Delta t},$$

$$a_4 = -2a_0, \quad a_5 = -\frac{1}{2}a_1, \quad a_6 = \frac{1}{2}a_0, \quad a_7 = \frac{1}{9}a_3$$

- ③ 使用特定的自起步方法计算 $x_{\Delta t}$, $\dot{x}_{\Delta t}$ 和 $\ddot{x}_{\Delta t}$;
 ④ 形成有效刚度矩阵 \tilde{k} , $\tilde{k} = k + a_0 m + a_1 c$;
 ⑤ 对 \tilde{k} 作三角分解, $\tilde{k} = LDL^T$ 。

2) 对每一个时间步进行计算

- ① 计算时刻的有效荷载

$$\tilde{p}_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t} + m(a_2 x_t + a_4 x_{t-\Delta t} + a_6 x_{t-2\Delta t}) + c(a_3 x_t + a_5 x_{t-\Delta t} + a_7 x_{t-2\Delta t})$$

- ② 求解 $t + \Delta t$ 时刻的位移

$$\tilde{k} x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t}$$

- ③ 如果需要, 计算 $t + \Delta t$ 时刻的加速度和速度

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = a_0 x_{t+\Delta t} - a_2 x_t - a_4 x_{t-\Delta t} - a_6 x_{t-2\Delta t}$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = a_1 x_{t+\Delta t} - a_3 x_t - a_5 x_{t-\Delta t} - a_7 x_{t-2\Delta t}$$

4.3.3 豪鲍尔特法的特点

豪鲍尔特法和中心差分法的基本差别在于豪鲍尔特法的刚度矩阵 k 是作为所求位移向量 $x_{t+\Delta t}$ 的因子出现的。因为(4-18)式是考虑了在 $t + \Delta t$ 时刻的平衡, 而不像中心差分法是考虑在 t 时刻的平衡, 因而出现了 $kx_{t+\Delta t}$ 项。由于这个原因, 豪鲍尔特积分方法是隐式积分方法, 而中心差分方法则是显式积分方法。豪鲍尔特方法所采用的时间步长不受临界时间步长极限的限制, 通常 Δt 选择比中心差分法中(4-16)式给定的时间步长要大得多。此法对线性动力问题是无条件稳定的。

豪鲍尔特的逐次求解方法的另一个显著特点, 就是在质量和阻尼的影响被略去的条件下, 可以直接简化为静力分析, 但中心差分方法则不能。换句话说, 如 $c = 0$, $m = 0$, 豪鲍尔特方法可得到与时间无关荷载的静力解。

4.3.4 例题

例4-2 利用豪鲍尔特法求解例4-1所给的简单体系的反应, 分别取 $\Delta t = 0.28$ 和 $\Delta t = 28$ 进行计算。

[解] ①考虑 $\Delta t = 0.28$ 的情况, 按照上述的解题步骤求出积分常数

$$a_0 = 25.5, \quad a_1 = 6.55, \quad a_2 = 63.8, \quad a_3 = 10.7,$$

$$a_4 = -51.0, \quad a_5 = -5.36, \quad a_6 = 12.8, \quad a_7 = 1.19$$

开始积分前必须求得 $x_{-\Delta t}$ 和 $x_{-2\Delta t}$ ，为了方便，这里直接引用前节中心差分法例4-1中的计算结果中的前两步(亦可通过对初始条件作启动处理得到)，而从 $x_{\Delta t}$ 开始计算，即

$$x_0 = [0 \quad 0]^T, \quad x_{\Delta t} = [0 \quad 0.389]^T, \quad x_{2\Delta t} = [0.0305 \quad 1.44]^T$$

求有效刚度矩阵和有效荷载矩阵。

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 25.5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 & -2 \\ -2 & 29.5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + (63.8x_t - 51.0x_{t-\Delta t} + 12.8x_{t-2\Delta t}) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取12个时间步长，求解 $\tilde{k}x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t}$ ，计算结果见表4-2。

表4-2 豪鲍尔特法计算结果($\Delta t = 0.28$)

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移	0.000	0.031	0.166	0.460	0.922	1.51	2.12	2.64	2.93	2.92	2.57	1.94
x	0.389	1.44	2.78	4.07	5.02	5.47	5.39	4.90	4.20	3.47	2.89	2.55

②讨论时间步长扩大100倍，即 $\Delta t = 28$ 的情况，观察豪鲍尔特法的无条件稳定性。开始的积分使用前例 Δt 和 $2\Delta t$ 时刻的精确反应，即

$$x_{\Delta t} = [2.19 \quad 2.24]^T, \quad x_{2\Delta t} = [2.92 \quad 3.12]^T$$

求取 \tilde{k}

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0.00255 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0051 & -2.000 \\ -2.000 & 4.00255 \end{bmatrix}$$

把 \tilde{k} 和 k 比较， \tilde{k} 几乎和 k 相等。从

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

解出 $[x_{1s} \quad x_{2s}]^T$ ，计算时应该注意体系的静力位移为

$$x_{st} = [1.0 \quad 3.0]^T$$

对应于12个时间步长位移的反应，见表4-3。

表4-3 豪鲍尔特法计算结果($\Delta t = 28$)

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移	2.19	2.92	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
x	2.24	3.12	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00	3.00

从上表看出，位移的反应迅速地趋于静力的解。

4.4 威尔逊- θ 法

4.4.1 线性加速度假设

威尔逊- θ 法是线性加速度法的推广。所谓的线性加速度法就是假定在时刻 t 到时刻

$t + \Delta t$ 的时间间隔(或称时间步长)内, 加速度向量(以下简称加速度)按线性关系增长(或衰减)。实际上加速度随时间变化的规律是复杂的, 在一个时间步长间隔内对加速度进行某种假设和限制, 只是数学上的一种简化处理手段。因此, 线性加速度法只是一种近似的方法。显然, 如时间步长取得足够小, 就能达到一定的计算精度。有了这种假设, 就能相应地确定该时间步长内速度和位移的变化规律(速度向量呈二次变化, 位移向量呈三次变化), 进而求解整个系统的动力反应。众所周知, 对加速度的变化规律, 计算实践上还可以作出其他各种不同的近似假设, 威尔逊- θ 法将其处理成线性变化只是许多假设中较简化的一种。

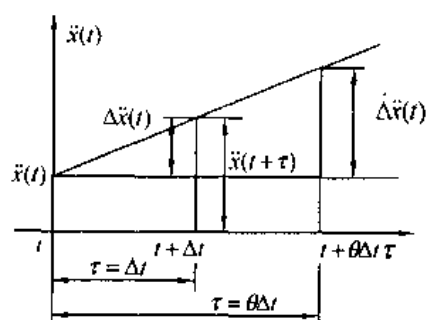


图 4-3 威尔逊- θ 法示意图

标准的线性加速度逐次积分法, 只有当其时间步长间隔 Δt 小于某一临界值时, 它的解才是收敛的。如不对其进一步处理, 方法只是有条件的稳定, 这样使用上就要受限制。实际上, 计算中较广泛应用的是对标准加速度逐次积分再加改进后的威尔逊- θ 法(见图4-3)。

标准的线性加速度法假定在时刻 t 到时刻 $t + \Delta t$ 的时间间隔 Δt 内, 加速度是按线性变化的。而威尔逊- θ 法是假定这种线性变化的时间间隔即步长取得更大些, 也即认为在时刻 t 到时刻 $t + \theta\Delta t$ 的时间步长内其加速度变化都是线性的, 其中 θ 取值不小于 1.37, 时间间隔 Δt 的大小可由精度要求控制而不受收敛条件的限制, 因而它是无条件稳定的。实践证明, 在满足计算稳定的前提下, θ 值不宜选的太大, 一般取 $\theta = 1.4$ 。

4.4.2 威尔逊- θ 法的求解公式

以 τ 表示时间增量, 其中 $0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$; 在 t 到 $t + \theta\Delta t$ 时间间隔内, 假定

$$\ddot{x}_{t+\tau} = \ddot{x}_t + \frac{\tau}{\theta\Delta t}(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t) \quad (4-21)$$

对上式进行一次积分, 得

$$\dot{x}_{t+\tau} = \dot{x}_t + \ddot{x}_t\tau + \frac{\tau^2}{2\theta\Delta t}(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t) \quad (4-22)$$

再积分一次

$$x_{t+\tau} = x_t + \dot{x}_t\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}_t\tau^2 + \frac{1}{6\theta\Delta t}\tau^3(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{x}_t) \quad (4-23)$$

令 $\tau = \theta\Delta t$ 并代入(4-22)式及(4-23)式, 可以得到用 $t + \theta\Delta t$ 时刻的加速度 $\ddot{x}_{t+\theta\Delta t}$ 及 t 时刻的 x_t , \dot{x}_t 和 \ddot{x}_t 表示的 $t + \theta\Delta t$ 时刻的速度和位移, 即

$$\dot{x}_{t+\theta\Delta t} = \dot{x}_t + 0.5\theta\Delta t(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{x}_t) \quad (4-24)$$

$$x_{t+\theta\Delta t} = x_t + \theta\Delta t\dot{x}_t + \frac{1}{6}\theta^2\Delta t^2(\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + 2\ddot{x}_t) \quad (4-25)$$

前述动力平衡方程式中包含了位移、速度和加速度。为了求解方便, 必须只保留其中一项, 而消去其他二项。这里, 将加速度和速度用位移表示, 从而方程只含有位移项。将(4-25)式变化, 可得关系式

$$\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}_t - 2\ddot{x}_t \quad (4-26)$$

将(4-26)式代入(4-24)式得

$$\dot{x}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta \Delta t} (x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - 2\dot{x}_t - \frac{1}{2}\theta \Delta t \ddot{x}_t \quad (4-27)$$

为了求取在 $t + \theta\Delta t$ 时刻的位移、速度和加速度的解，先考虑在 $t + \theta\Delta t$ 时刻的运动平衡方程。因为加速度是线性变化的，将 t 时刻的荷载和 $t + \Delta t$ 时刻的荷载线性外插，可得到 $t + \theta\Delta t$ 时刻的荷载向量 $\tilde{p}_{t+\theta\Delta t}$ 。这样，在 $t + \theta\Delta t$ 时刻的动力方程为

$$m\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + c\dot{x}_{t+\theta\Delta t} + kx_{t+\theta\Delta t} = p_{t+\theta\Delta t} \quad (4-28)$$

式中

$$p_{t+\theta\Delta t} = p_t + \theta(p_{t+\Delta t} - p_t)$$

将(4-26)和(4-27)式代入(4-28)式，可得到方程

$$\left(k + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} m + \frac{3}{\theta \Delta t} c \right) x_{t+\theta\Delta t} = p_t + \theta(p_{t+\Delta t} - p_t) + c \left(\frac{3}{\theta \Delta t} x_t + 2\dot{x}_t + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{x}_t \right) + m \left(\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} x_t + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}_t + 2\ddot{x}_t \right) \quad (4-29)$$

上式可简写为

$$\tilde{k}x_{t+\theta\Delta t} = \tilde{p}_{t+\theta\Delta t} \quad (4-30)$$

其中

$$\tilde{k} = k + \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} m + \frac{3}{\theta \Delta t} c$$

$$\tilde{p}_{t+\theta\Delta t} = p_t + \theta(p_{t+\Delta t} - p_t) + m \left(\frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} x_t + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}_t + 2\ddot{x}_t \right) + c \left(\frac{3}{\theta \Delta t} x_t + 2\dot{x}_t + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{x}_t \right)$$

求解方程(4-30)，则得到 $x_{t+\theta\Delta t}$ ，将 $x_{t+\theta\Delta t}$ 代入式(4-26)中，就得到 $\ddot{x}_{t+\theta\Delta t}$ 。如在(4-21)式中，取 $\tau = \Delta t$ ，并将(4-26)式代入，有

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}_t + \left(1 - \frac{3}{\theta} \right) \ddot{x}_t \quad (4-31)$$

将(4-26)式代入(4-22)和(4-23)式中，取 $\tau = \Delta t$ ，则有

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{x}_{t+\Delta t} + \ddot{x}_t) \quad (4-32)$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{x}_{t+\Delta t} + 2\ddot{x}_t) \quad (4-33)$$

4.4.3 威尔逊- θ 法的计算步骤

1) 初始计算

- ① 形成刚度矩阵 k ，质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c ；
- ② 给定初始条件 x_0 ， \dot{x}_0 和 \ddot{x}_0 ；
- ③ 选择时间步长 Δt ，取常数 $\theta = 1.4$ ，并计算积分常数

$$a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}, \quad a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}, \quad a_2 = 2a_1, \quad a_3 = \frac{1}{2}\theta\Delta t, \quad a_4 = \frac{a_0}{\theta},$$

$$a_5 = -\frac{a_2}{\theta}, \quad a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}, \quad a_7 = 0.5\Delta t, \quad a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}$$

④ 形成有效刚度矩阵 \tilde{k} , $\tilde{k} = k + a_0 m + a_1 c$;

⑤ 对 \tilde{k} 作三角分解, $\tilde{k} = LDL^T$ 。

2) 对每一个时间步进行计算

① 计算 $t + \theta\Delta t$ 时刻的有效荷载

$$\tilde{p}_{t+\theta\Delta t} = p_t + \theta(p_{t+\Delta t} - p_t) + m(a_0 x_t + a_2 \dot{x}_t + 2\ddot{x}_t) + c(a_1 x_t + 2\dot{x}_t + a_3 \ddot{x}_t)$$

② 求解 $t + \theta\Delta t$ 时刻的位移

$$LDL^T x_{t+\theta\Delta t} = \tilde{p}_{t+\theta\Delta t}$$

③ 计算 $t + \Delta t$ 时刻的加速度、速度和位移

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = a_4(x_{t+\theta\Delta t} - x_t) + a_5 \dot{x}_t + a_6 \ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + a_7(\ddot{x}_{t+\Delta t} + \ddot{x}_t)$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + a_8(\ddot{x}_{t+\Delta t} + 2\ddot{x}_t)$$

刚度矩阵 k 是未知位移向量 $x_{t+\theta\Delta t}$ 的系数矩阵, 用的是 $t + \theta\Delta t$ 时刻的平衡条件, 所以威尔逊- θ 法是一种隐式的积分法。这种方法不需要特定的开始方法, 原因在于 $t + \Delta t$ 时刻的位移、速度和加速度可以用 t 时刻的相同的量来表示。

4.4.4 例题

例4-3 使用威尔逊- θ 法计算例4-1系统的反应, $\theta = 1.4$ 。

[解] ① 考虑 $\Delta t = 0.28$ 的情况, 按照前面的计算步骤有

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \ddot{x}_0 = [0 \quad 10]^T$$

\ddot{x}_0 在例4-1中已求得。这里

$$a_0 = 39.0, \quad a_1 = 7.65, \quad a_2 = 15.3, \quad a_3 = 0.196, \quad a_4 = 27.9$$

$$a_5 = -10.9, \quad a_6 = -1.14, \quad a_7 = 0.14, \quad a_8 = 0.0131$$

而

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 39.0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84.1 & -2 \\ -2 & 43.0 \end{bmatrix}$$

对于每个时间步长, 必须算出:

$$\tilde{p}_{t+\theta\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (39.0 x_t + 15.3 \dot{x}_t + 2\ddot{x}_t)$$

由

$$\tilde{k} x_{t+\theta\Delta t} = \tilde{p}_{t+\theta\Delta t}$$

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = 27.9(x_{t+\theta\Delta t} - x_t) - 10.9\dot{x}_t - 1.14\ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + 0.14(\ddot{x}_{t+\Delta t} + \ddot{x}_t)$$

$$x_{i+\Delta t} = x_i + \Delta t \dot{x}_i + 0.0131(\ddot{x}_{i+\Delta t} + 2\ddot{x}_i)$$

可先求出 $x_{i+\theta\Delta t}$ ，进而计算出 $\ddot{x}_{i+\Delta t}$ ， $\dot{x}_{i+\Delta t}$ 和 $x_{i+\Delta t}$ 。最终的位移计算结果见表4-4。

表4-4 威尔逊- θ 法计算结果($\Delta t = 0.28$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	0.006	0.053	0.196	0.490	0.952	1.54	2.16	2.67	2.92	2.82	2.33	1.54
x	0.366	1.34	2.64	3.92	4.88	5.31	5.18	4.61	3.82	3.06	2.52	2.29

②考虑 $\Delta t = 28$ 的情况，有

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 0.00392 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.00784 & -2 \\ -2 & 4.00392 \end{bmatrix}$$

比较 \tilde{k} 与 k 可见二者非常接近，这和豪鲍尔特方法相似。最终的位移计算结果见表4-5。

表4-5 威尔逊- θ 法计算结果($\Delta t = 28$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	1.09	2.83	-2.61	5.79	-4.30	6.30	-3.97	5.46	-2.89	4.31	1.77	3.29
x	1130	-830	655	-490	372	-272	207	-148	115	-80.0	64.5	-42.5

在此应注意到加速度的初始条件，即

$$\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$$

引起了初始的位移反应。这种反应随时间的增加而减少。如果 $\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$ ，所计算出的位移反应见表4-6。

表4-6 威尔逊- θ 法计算结果($\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	0.364	1.45	0.635	1.28	0.795	1.15	0.891	1.08	0.943	1.04	0.970	1.02
x	1.09	4.34	1.90	3.85	2.36	3.47	2.65	3.26	2.81	3.14	2.90	3.08

由表4-6可见，其计算结果趋近于静力解。

4.5 纽马克(Newmark)法

4.5.1 纽马克法的基本假定和计算公式

纽马克在1959年提出了一种逐次积分格式，故称这种积分格式为纽马克方法。这种方法采用的基本假定是

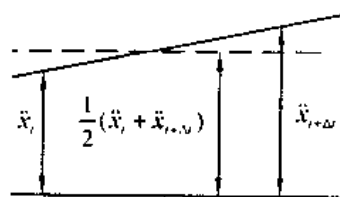


图 4-4 纽马克的常加速度法

$$\dot{x}_{i+\Delta t} = \dot{x}_i + [(1-\delta)\ddot{x}_i + \delta\ddot{x}_{i+\Delta t}]\Delta t \quad (4-34)$$

$$x_{i+\Delta t} = x_i + \dot{x}_i\Delta t + [(0.5-\alpha)\ddot{x}_i + \alpha\ddot{x}_{i+\Delta t}]\Delta t^2 \quad (4-35)$$

式中， α 和 δ 是按积分的精度和稳定性要求可以调整的参数。当 $\delta = 0.5$ ， $\alpha = \frac{1}{6}$ 时，(4-34)式和(4-35)式与线性加速度法一致(即 $\theta = 1$ 时的威尔逊- θ 法)。纽马克方法是作为一

种无条件稳定的方法提出的。若假定 $\delta = 0.5$, $\alpha = 0.25$, 实际上就是常加速度法(见图4-4)

常加速度法是应用较广的逐次积分法之一。研究表明, 当 $\delta \geq 0.5$, $\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$ 时, 纽马克法是无条件稳定的。

为了求解在 $t + \Delta t$ 时刻位移、速度和加速度的解, 可考虑 $t + \Delta t$ 时刻的平衡方程

$$m\ddot{x}_{t+\Delta t} + c\dot{x}_{t+\Delta t} + kx_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t} \quad (4-36)$$

由(4-35)式可解出用 $x_{t+\Delta t}$ 等项表示的 $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ 。若把 $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ 代入(4-34)式就得到仅由未知位移 $x_{t+\Delta t}$ 表示的 $\dot{x}_{t+\Delta t}$, 即有

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(x_{t+\Delta t} - x_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{x}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{x}_t \quad (4-37)$$

和

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}(x_{t+\Delta t} - x_t) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\dot{x}_t + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right)\Delta t\ddot{x}_t \quad (4-38)$$

将(4-37)式和(4-38)式代入(4-36)式, 就得到关于 $x_{t+\Delta t}$ 的平衡方程

$$\tilde{k}x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t} \quad (4-39)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}m + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}c \\ \tilde{p}_{t+\Delta t} &= p_{t+\Delta t} + m\left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}x_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{x}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{x}_t\right] + \\ &\quad c\left[\frac{\delta}{\alpha\Delta t}x_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right)\dot{x}_t + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right)\Delta t\ddot{x}_t\right] \end{aligned}$$

求解(4-39)式, 就可得到 $x_{t+\Delta t}$, 然后根据(4-37)式和(4-34)式可求得 $\dot{x}_{t+\Delta t}$ 和 $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ 。

因为纽马克法和威尔逊- θ 法计算程序方法相近, 这就为我们提供了在一个简单的程序中方便地使用两种积分方法的可能。

4.5.2 纽马克法的计算步骤

1) 初始计算

- ① 形成刚度矩阵 k , 质量矩阵 m 和阻尼矩阵 c ;
- ② 给定初始条件 x_0 , \dot{x}_0 和 \ddot{x}_0 ;
- ③ 选择时间步长 Δt 以及参数 δ ($\delta \geq 0.50$) 和 α ($\alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$), 并计算积分常数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right), \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \delta\Delta t \end{aligned}$$

- ④ 形成有效刚度矩阵 \tilde{k} , $\tilde{k} = k + a_0m + a_1c$;
- ⑤ 把 \tilde{k} 作三角分解, $\tilde{k} = LDL^T$ 。

2) 对每一个时间步进行计算

① 计算 $t + \Delta t$ 时刻的有效荷载

$$\tilde{p}_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t} + m(a_0 x_t + a_2 \dot{x}_t + a_3 \ddot{x}_t) + c(a_1 x_t + a_4 \dot{x}_t + a_5 \ddot{x}_t)$$

② 求解 $t + \Delta t$ 时刻的位移

$$LDL^T x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t}$$

③ 计算 $t + \Delta t$ 时刻的加速度和速度

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = a_0 (x_{t+\Delta t} - x_t) - a_2 \dot{x}_t - a_3 \ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + a_6 \ddot{x}_t + a_7 \ddot{x}_{t+\Delta t}$$

4.5.3 例题

例4-4 用纽马克方法计算例4-1给出的系统的动力反应, 取 $\alpha = 0.25$, $\delta = 0.5$ 。

[解] ①考虑 $\Delta t = 0.28$ 情况, 按上面的计算步骤, 则有

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \ddot{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}^T;$$

积分常数为

$$a_0 \approx 51.0, \quad a_1 = 7.14, \quad a_2 = 14.3, \quad a_3 = 1.00,$$

$$a_4 = 1.00, \quad a_5 = 0.00, \quad a_6 = 0.14, \quad a_7 = 0.14$$

而有效刚度矩阵

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 51.0 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & -2 \\ -2 & 55 \end{bmatrix}$$

对于每一时间步长, 必须计算

$$\tilde{p}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (51.0 x_t + 14.3 \dot{x}_t + 1.00 \ddot{x}_t)$$

由

$$\tilde{k} x_{t+\Delta t} = \tilde{p}_{t+\Delta t}$$

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = 51.0 (x_{t+\Delta t} - x_t) - 14.3 \dot{x}_t - 1.00 \ddot{x}_t$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + 0.14 \ddot{x}_t + 0.14 \ddot{x}_{t+\Delta t}$$

可计算出对应于12个步长的位移反应, 其结果见表4-7。

表4-7 纽马克法计算结果 ($\Delta t = 0.28$)

时间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位移	0.007	0.050	0.189	0.484	0.958	1.57	2.21	2.72	2.94	2.76	2.18	1.28
x	0.364	1.35	2.68	3.98	4.92	5.28	5.05	4.38	3.54	2.80	2.35	2.24

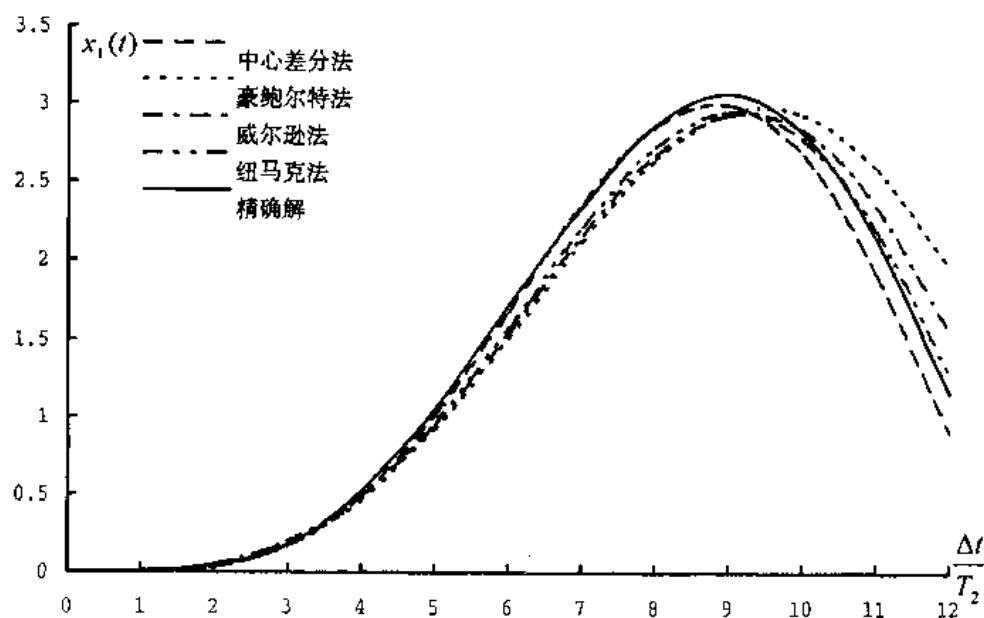
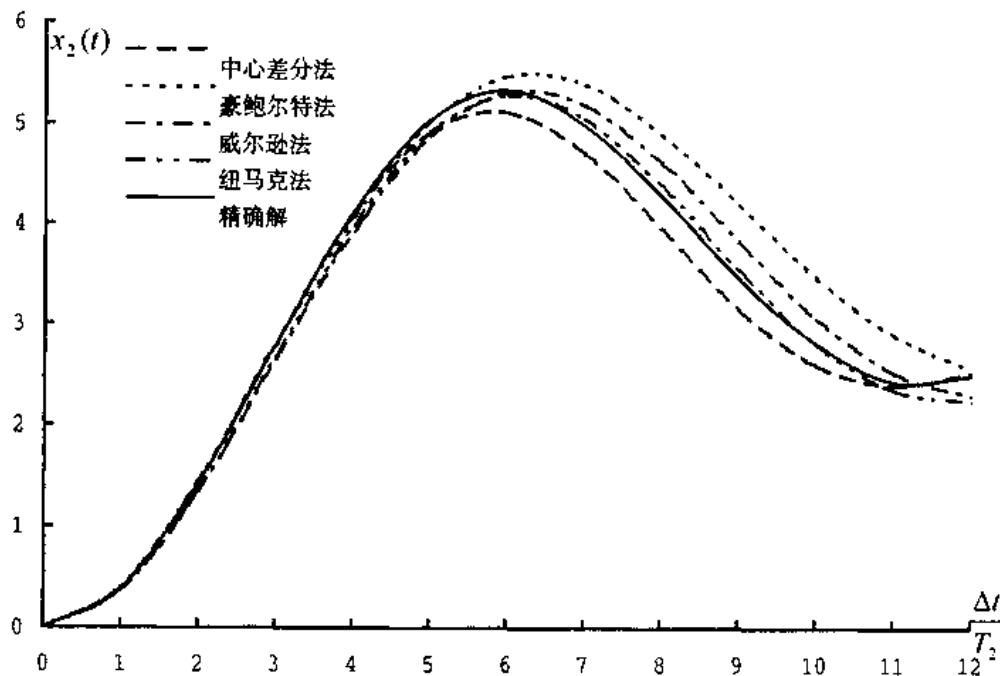
②考虑时间步长 $\Delta t = 28$, 在此情况下有

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 5.10 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.01 & -2.00 \\ -2.00 & 4.01 \end{bmatrix}$$

因此, 正如在使用豪鲍尔特法和威尔逊- θ 方法积分时一样, \tilde{k} 接近于 k 。如果使用初始条件, $\ddot{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}^T$, 位移反应的计算结果见表4-8。

表4-8 纽马克法计算结果($\Delta t = 28$, $\ddot{x}_0 = [0 \ 10]^T$)

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移	1.99	0.028	1.94	0.113	1.83	0.249	1.67	0.431	1.46	0.651	1.23	0.900
x	5.99	0.045	5.90	0.178	5.72	0.394	5.47	0.687	5.14	1.05	4.75	1.46

图4-5 不同积分方法对 x_1 计算结果的比较图4-6 不同积分方法对 x_2 的计算结果的比较

如果改变初始条件使 $\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$, 位移反应的计算结果见表4-9。

表4-9 纽马克法计算结果($\Delta t = 28$, $\ddot{x}_0 = [0 \ 0]^T$)

时 间	Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$	$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
位 移 x	0.996	1.01	0.982	1.02	0.969	1.04	0.957	1.05	0.947	1.06	0.939	1.06
	2.99	3.02	2.97	3.04	2.95	3.06	2.93	3.08	2.91	3.09	2.90	3.11

由此可见, 计算结果也趋近于静力解。

在例4-1至例4-4中, 分别使用了中心差分法、豪鲍尔特法、威尔逊- θ 法和纽马克法计算了简单的两个自由度系统的动力反应。把这四种方法计算出的结果绘于图4-5和图4-6中并进行比较, 虽然对于稳定性和精度说来, 这些数值积分法所选择的时间步长 Δt 相对较大, 但是数值积分计算的结果能很好的近似于用振型叠加法分析得出的该系统的精确的反应。其中, 按振型叠加法(精确解)计算同一个例题的过程可参考第3章例3-8。

除以上介绍的方法以外, 在某些文献和专著中还介绍了龙格-库塔法(Runge-kutta法)、傅里叶法(Fourier法)、欧拉-高斯法(Euler-Gauss法)以及米尔拉斯法等计算方法。

4.6 数值积分法的稳定性和计算精度

采用数值积分法求解动力方程的关键在于如何选择合适的步长, 使在较短的时间内, 花费代价最少以得出与实际结构体系动力反应相近似的解。因此需要进一步讨论这种积分法的稳定性和计算精度问题。

4.6.1 计算精度和稳定性的概念

计算精度是指数值解与精确的连续解之间的误差程度。稳定性是指对任意时间步长所得的解是否会因初始条件或计算过程的舍入误差的扩散而导致解的无限增长或振荡的性质。计算的稳定实际上意味着在任一时刻的位移、速度和加速度由于计算机上的舍入的缘故, 在后续的逐次积分计算中, 误差不致持续增长和放大, 从而使数值解能够迅速收敛于一个稳定的值。总之, 稳定性是指误差的积累是否能得到控制的问题。稳定性并不能保证精度, 反之亦然。

数值积分法的稳定性和精度与所假定的阻尼的性质、承受的荷载以及时间步长的大小等因素有关, 因此在数值积分法中选择一个适当的时间步长是非常重要的。通常, 如果时间步长足够的小, 包括高阶振型在内的各阶振型都能精确的积分, 那么解的精确度和稳定性就可以得到保证。但是如果时间步长取得过小, 则必然要花费很大的计算代价, 这也是不划算的。如果对于任意的初始条件和任意的时间步长, 即在特定情况下虽然 $\frac{\Delta t}{T}$ 比较大, 而数值积分法的解也不致于无限地增长, 则这种积分方法称为无条件稳定的; 若数值积分方法的解只有在 $\frac{\Delta t}{T}$ 小于一个被称为稳定极限的特定值的条件下才能得到控制, 则这种积分方法仅是条件稳定的。

为了便于讨论精度和稳定性的问题, 可先对运动方程和解的形式进行变换和整理。

4.6.2 运动方程变换和解的形式改进

利用振型的正交性并引入广义坐标的概念, 可以把运动方程

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p$$

化为 n 个非耦合的方程

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{P_i^*(t)}{M^*}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4-40)$$

上式可以用杜哈梅尔积分方法(The Duhamel Integral)求解, 也可以用前面讨论过的任何一种数值积分法求解。因为周期 $T_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是已知的, $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ 对于(4-40)式中每一个独立方

程使用一个适当的时间步长进行数值积分。如果(4-40)式使用相同的时间步长 Δt 积分, 这样振型迭加的分析将完全等效于使用相同的积分方法和时间步长 Δt 进行直接数值积分方法的分析。换句话说, 使用任何一种方法得到有限元平衡方程的解都是相同的。因此, 为了研究直接数值积分法的精度, 应把注意力从运动方程转到用相同的时间步长按(4-40)式方程的积分。采用这种方法, 在数值积分方法的精度和稳定性分析中的变量仅是 Δt , ω_i 和 $\xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 而不是刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵中的那些所有元素。进一步说, 因为(4-40)式中 n 个方程都是类似的, 现仅需要研究方程(4-40)中任一行的积分, 如第 i 行

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = p_i(t) \quad (4-41)$$

(4-41)式就是自由振动周期为 T_i , 阻尼比为 ξ_i , 施加荷载为 p_i 的单自由度运动平衡方程。经过上述变换, 在分析中需考虑的变量就减少了。根据数值积分方法解的性质, 把(4-40)式中求解的误差可以估计为变量 $\frac{\Delta t}{T}$, ξ_i 和 p_i 的函数。

下面将进一步建立求取积分近似解的递推形式解的表达式。

假定已得到了在离散时刻 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ 等时刻所需要的解, 而 $t + \Delta t$ 时刻是下一步需要的解, 那么对一个特定的所考虑的积分方法, 都可以建立下面的递推关系式

$$\tilde{y}_{t+\Delta t} = A\tilde{y}_t + LP_{t+r} \quad (4-42)$$

式中, $\tilde{y}_{t+\Delta t}$ 和 \tilde{y}_t 是包含由(4-42)式求解的各个量(即位移, 速度和加速度), P_{t+r} 是 $t+r$ 时的荷载。在所考虑的积分方法中, r 可分别取作 $0, \Delta t$ 或 $\theta\Delta t$ 。而 A 和 L 分别是积分逼近算子矩阵和荷载算子向量。(4-42)式中的每一个量都取决于所采取的积分方法。

注意到(4-42)式可以经过逐次循环得到任意 $t + n\Delta t$ 时刻的解

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{t+n\Delta t} = & A^n \tilde{y}_t + A^{n-1} LP_{t+r} + A^{n-2} LP_{t+\Delta t+r} + \dots + \\ & ALP_{t+(n-2)\Delta t+r} + LP_{t+(n-1)\Delta t+r} \end{aligned} \quad (4-43)$$

(4-43)式可用来作为研究积分方法的稳定性和精度的关系式, 下面对不同的积分方法, 导出算子矩阵 A 和算子向量 L 。

4.6.3 算子矩阵 A 和算子向量 L 的推导

在中心差分法中, 可用相应公式分别表示时刻 t 的近似的加速度和速度。时刻 t 的非耦